

# Eficiencia de las técnicas de medición del riesgo de mercado ante situaciones de crisis \*

## *Efficiency in market risk measures techniques face to crisis situations*

**Mariano González Sánchez** \*\*. Universidad CEU Cardenal Herrera

**Juan M. Nave Pineda**. Universidad CEU Cardenal Herrera

---

**RESUMEN** Actualmente, la estimación de riesgos constituye un auténtico arte de la gestión empresarial, en la que el carácter científico viene dado por las técnicas que pueden ser empleadas. Dentro de éstas, y a raíz de los cambios normativos y las últimas situaciones críticas de los mercados, el decisor no solo ha sofisticado los mecanismos empleados, sino también ha aumentado las exigencias impuestas a las medidas de riesgos. En este sentido, existe un amplio abanico de posibles técnicas que pueden emplearse en la medición del riesgo de mercado (VaR paramétrico, simulación histórica, *shortfall*, entre otras). La elección está condicionada en primer lugar por el comportamiento del activo, lo que se ha dado en llamar *stylized facts*, y en segundo lugar por los resultados de *backtesting* de dichas técnicas. El objetivo de este trabajo es analizar los resultados de estas técnicas sobre una muestra de mercado (IBEX-35), con el fin de discriminar en situaciones críticas como las ocurridas recientemente, facilitando así la elección entre todas ellas.

**PALABRAS CLAVE** Valor en Riesgo; Teoría de los Valores Extremos; Riesgos financieros; Condicional-VaR, y Simulación histórica.

---

**ABSTRACT** These days the estimation of risk is one of the real arts of business management; with a scientific aspect provided by the techniques employed. In this context, and due to regulatory changes and the recent critical market situations, decision makers have not only increased the sophistication of the mechanisms used but have also increased the demands imposed on risk measurement. There is a wide range of possible techniques that can be used to measure market risk (parametric VaR, historical simulation, «shortfall», among others). the choice is conditioned firstly by the behaviour of the stock, which is known as «stylized facts», and secondly by the results of «backtesting» of these techniques. The objective of this study is to analyse the results of these techniques using a market sample (IBEX-35), in order to be able to discriminate in critical situations such as those that have occurred recently and thus facilitate the choice of technique.

**KEY WORDS** Value at Risk; Theory of Extreme Events; Financial risks; Conditional-VaR, and Historical simulation.

---

\* Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto de Investigación SEJ 2006-05051 y ECO 2009-136, y la Generalitat Valenciana, PROMETEO/2008/106.

\*\* **Autor para correspondencia:** Mariano González Sánchez. Departamento de Economía y Empresa de la Universidad CEU Cardenal Herrera. Luis Vives, 1. 46115 Alfara del Patriarca (Valencia). Teléfono: +34 961369000. Fax: +34 961369007. Correo-e: mariano.gonzalez@uch.ceu.es

## 1. INTRODUCCIÓN

La garantía patrimonial de una empresa ante la realización de un riesgo o manifestación de una pérdida son sus fondos propios. Por ello, la gestión moderna de riesgos exige de la entidad la determinación de qué riesgos y con qué nivel pueden ser asumidos por la compañía, debiéndose transmitir el resto a un tercero a través de algún tipo de instrumento de cobertura. Desde esta perspectiva, la actividad desarrollada por una empresa en un mercado puede verse como el resultado de una gestión tendente a asumir y transferir riesgos. El problema que suscita esta operativa, y que hace imprescindible contar con herramientas adecuadas de medición de riesgos, es la incertidumbre sobre el futuro, característica propia de la actividad económica.

Si se entiende el riesgo como una situación probable futura que conllevaría una pérdida para la empresa en el supuesto de su realización, sería necesario para su estimación responder a una serie de cuestiones como: la probabilidad de que se materialice realmente la situación negativa que dé lugar a la pérdida; en qué instante futuro puede tener lugar el evento negativo; cuál será el importe de la pérdida en el supuesto de que se produzca la contingencia; y en qué área, operación, filial, etc., se producirá el evento. Dar respuesta a estas cuestiones exige analizar el comportamiento de los factores causantes del riesgo.

Si acotamos el estudio al ámbito de los mercados financieros, analizar el comportamiento de los factores de riesgo se traduce en estudiar las características de las series financieras, lo que se ha dado en llamar los hechos estilizados (*stylized facts*). En este sentido, y sin ánimo de ser exhaustivo, cabe destacar que en el comportamiento de los rendimientos de los activos se observan, entre otros, (Cont [2001]): la posibilidad de reversión a la media; asimetría; *clusters* de volatilidad y heterocedasticidad, y valores extremos o saltos, que provocan que las colas de la distribución sean más gruesas que las de una normal.

En este contexto, el objetivo de este trabajo es realizar un análisis empírico comparado de diversas alternativas de medición de riesgo de mercado que permitan recoger los hechos estilizados anteriormente indicados, puestos de manifiesto con mayor virulencia en períodos de crisis como los vividos recientemente.

Para lograr dicho objetivo, trabajamos sobre una muestra de datos diaria del IBEX-35, cartera representativa del mercado de renta variable español que durante el periodo analizado presenta las características indicadas anteriormente. A esta muestra se le aplican distintas técnicas de medición para diferentes horizontes temporales y niveles de confianza. En el análisis del riesgo de mercado sobre diferentes horizontes temporales es conveniente trasladar los resultados de estimación del riesgo de un horizonte temporal a otro diferente, teniendo que salvar los problemas de *scaling* que surgen, tradicionalmente solucionados mediante la regla de la raíz cuadrada del tiempo, inaplicable fuera de entornos gaussianos de los rendimientos. En este sentido un objetivo adicional de nuestro trabajo es comprobar la transformación más idónea en caso de crisis del mercado.

A nivel internacional existen un gran número de trabajos en los que se analiza los problemas e inconvenientes de las técnicas de medición del riesgo de mercado, tanto en términos generales (entre otros, Ju y Pearson [1999]; Berkowitz y O'Brien [2002]; Krause [2003];

Sarma y Shah [2003]; Bao y Ullah [2004], y Kuester *et al.* [2006]), como para algún tipo de mercado (entre otros, Pownall y Koedijk [1999]; Mittnik y Paoletta [2000]; Vlaar [2000]; Bao *et al.* [2006]; Berkowitz *et al.* [2006], y Lima y Neri [2007]).

Por el contrario, para el mercado español la literatura es menos extensa, aunque existen trabajos previos como el de Perote (2003) y el de Hernández (2003). Nuestro trabajo se diferencia de Perote (2003) por considerar la heterocedasticidad de la serie de rendimientos y la autocorrelación del cuadrado de los mismos, por emplear un conjunto más amplio de técnicas de ajuste de la cola de la distribución, por analizar más de un horizonte temporal y resolver el consiguiente problema de *scaling*, por comparar mediante diferentes pruebas de *backtesting* las técnicas analizadas, y por la muestra de datos utilizada que nos permite identificar las técnicas que superan dichas pruebas en situaciones críticas del mercado. Respecto del trabajo de Hernández (2003), las aportaciones de este trabajo se concretan en la utilización de muestras de estimación y de *backtesting* más amplias, en la estimación del riesgo para diferentes niveles de confianza, en el análisis para distintos horizontes temporales y la resolución del problema de *scaling* implícito, y en el empleo, y la especificación, de distintas funciones de distribución de los rendimientos de la cartera de mercado.

El resto de este trabajo se estructura del siguiente modo: en el siguiente apartado se definen las técnicas a comparar; en el tercer apartado se analiza la muestra de datos de mercado sobre la que se realizará el estudio y se muestran los resultados obtenidos al aplicar las distintas técnicas en los distintos escenarios diseñados. Se finaliza con las principales conclusiones del trabajo.

## 2. MEDICIÓN DEL RIESGO DE MERCADO

### 2.1. MODELO APLICADO A LOS RENDIMIENTOS DEL MERCADO

Previamente a la selección de una técnica de medición es preciso comprobar si las hipótesis en que se apoya dicha técnica se ajustan a las propiedades del rendimiento de los activos sobre los que se pretende aplicar. En caso contrario, puede caerse en el error de confundir riesgo de modelo con riesgo de mercado.

Por todo ello, en primer lugar, tenemos que especificar el modelo que mejor se ajuste al proceso generador de datos correspondiente. Es habitual emplear en este contexto modelos discretos del tipo AR-GARCH con la siguiente formulación general:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = x_t = \alpha + \sum_{i=1}^P b_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad z_t; IID(0,1) \tag{1.1.}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{r=1}^R \alpha_r \cdot \varepsilon_{t-r}^2 + \sum_{d=1}^D \beta_d \cdot \sigma_{t-d}^2$$

en donde  $S$  es el precio del activo,  $x$  su rendimiento, y  $P$ ,  $R$  y  $D$  los retardos considerados que suelen ser de orden uno.

Si bien la expresión (1.1) ya recoge en parte los hechos estilizados de los rendimientos de los activos financieros, el problema estriba en la elección de la distribución de  $z$  que permita recoger, especialmente, la leptocurtosis o problema de colas gruesas, propiedad que las diferentes técnicas de medición del riesgo consideradas recogen de forma distinta.

En este sentido, emplear modelos más flexibles y generales, que permiten recoger efectos asimétricos del precio sobre la volatilidad como son los FIEGARCH, FIAPARCH, SV (volatilidad estocástica) y otros similares, tal y como hace entre otros, Billio y Sartore (2003), Eberlein *et al.* (2003), Sadorsky (2005), Chan *et al.* (2007) y Bali y Theodossiou (2007), limitaría las posibles soluciones al problema de *scaling* tal y como se analiza más adelante.

Por otro lado, emplear otra distribución de los residuos distinta a la normal, que permita recoger características particulares de las series financieras, asimetría y leptocurtosis, como son la *t-student*, la Generalizada del Error (GED) y la *t-student* asimétrica, exigiría estimar por Maximun Likelihood (ML) y perder la robustez de las estimaciones que garantiza la estimación por *Quasi Maximun Likelihood* (QML).

Finalmente, señalar que cuando la estimación del modelo no es puntual como en este caso, puede presentarse inestabilidad en la selección de la mejor combinación modelo-distribución, tanto en el tiempo como en los diferentes horizonte temporales considerados (uno, cinco, diez y veinte días), lo que supondría cierta inconsistencia y dificultaría la comparabilidad posterior de las pruebas de *backtesting*.

## 2.2. TÉCNICAS DE MEDICIÓN

A lo largo de este estudio trabajamos con las técnicas de medición del riesgo de mercado que seguidamente enumeramos:

1. *VaR* paramétrico (Valor en Riesgo o *Value at Risk*) (Jorion [2000]), que asocia el riesgo con un percentil de una distribución previamente elegida para las innovaciones ( $z$ ). En nuestro caso tomaremos como referencia la distribución normal, es decir, en la expresión (1.1) consideraremos que  $z$  se distribuye normalmente con media cero y varianza uno.
2. *VaR* paramétrico con la extensión Cornish-Fisher, de modo que mediante una aproximación polinómica del tipo Gram-Charlier se recogerán aquellos efectos extremos que no pueden aproximarse mediante una distribución estándar, como por ejemplo la normal<sup>(1)</sup>. De este modo, si  $z_q$  es el valor del percentil en una distribución normal correspondiente al nivel de confianza para el que se mide el riesgo, entonces aplicando Cornish-Fisher, a partir de la asimetría (*skw*) y la kurtosis (*kur*) de los valores observados de  $z$  quedaría:

$$z_q^{CF} = z_q + \frac{skw}{6} (z_q^2 - 1) + \frac{kur - 3}{24} (z_q^3 - 3z_q) - \frac{skw^2}{36} (2z_q^3 - 5z_q) \quad (1.2)$$

(1) En Perote (2003) se utiliza la extensión Edgeworth-Sargan. Al respecto, no existe una probada superioridad entre ésta y la aquí utilizada, ya que ello depende de la hipótesis realizada sobre los órdenes de magnitud de los sucesivos momentos (Johnson *et al.* [1994]).

3. Condicional-VaR paramétrico (Rockafellar y Uryasev [2002]), es una media extrema del riesgo, e indica el valor esperado de la máxima pérdida por encima de, o condicionada a, un percentil (*VaR*) determinado.
4. *VaR* no paramétrico, esto es, no se le asocia ninguna distribución a los rendimientos, trabajándose sobre los resultados históricos. Ahora bien, como consecuencia de los hechos estilizados observados, la simulación histórica requiere de alguna modificación para intentar recoger dichas propiedades. En este sentido destacan dos alternativas:
  - a) *Simulación Histórica Ponderada* (SHW, Weighted Simulation Historical) (Boudoukh *et al.* [1998]), que asocia a cada resultado observado ( $x$ ) un peso mayor cuanto más próximo esté respecto del momento de medición.
  - b) *Simulación Histórica Filtrada* (SHF, Filtering Simulation Historical) (Barone-Adesi, *et al.* [2000]). En este caso la simulación (*bootstrapping*) se realiza sobre la serie observada de  $z$ , es decir, los valores simulados se obtienen a partir de la serie histórica de errores tipificados que se sustituyen en la ecuación de la media y de la varianza condicional, de modo que en cada instante se obtiene un valor del rendimiento y de su varianza condicional. Este proceso se repite un número elevado de veces, dando como resultado un conjunto de recorridos del precio desde el instante de medición hasta el horizonte temporal deseado, estimándose finalmente el riesgo como aquella diferencia entre cada uno de dichos precios finales y el actual, que se corresponda con el nivel de confianza deseado.
5. Aplicación de la Teoría de los Valores Extremos. En este caso el objetivo es ajustar una distribución extrema de máxima pérdida, para lo que existen dos aproximaciones (Embrechts *et al.* [1997]), bien recurrir al teorema de Fisher-Tippet-Gnedenko y estimar la distribución Generalizada de Eventos Extremos (GEV) mediante, por ejemplo, el método de Block Máxima, determinando así el Máximo *VaR* (Max-VaR); o bien, aplicar el teorema de Picklands-Dalkema-de Hann y calcular un modelo de *Peak Over Threshold* mediante la determinación de la distribución Generalizada de Pareto (GP) característica de los eventos, calculando el indicador conocido como Shortfall. Ahora bien, esta teoría no es aplicable directamente sobre la serie de rendimientos de los precios, puesto que se exige que su comportamiento sea independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.), y por ello en este trabajo seguimos la propuesta de McNeil y Frey (2000), aplicándola sobre los rendimientos tipificados ( $z$ ).

El procedimiento de estimación detallado de estas técnicas puede verse en el Anexo.

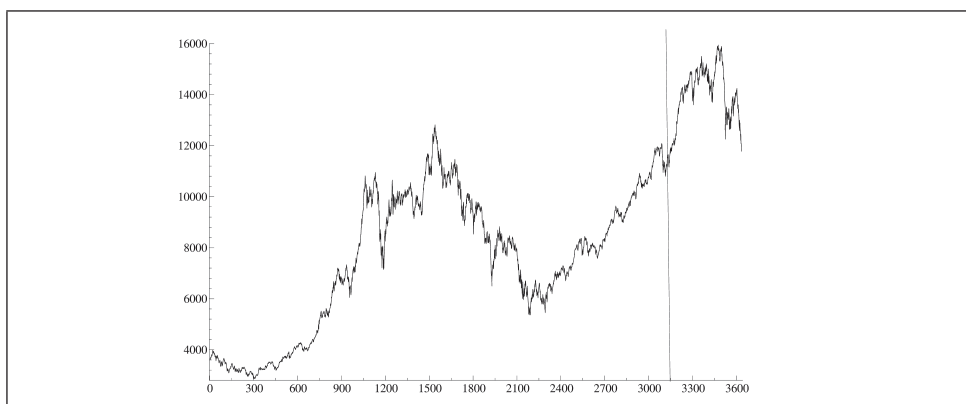
### 3. ESTUDIO EMPÍRICO

En este apartado realizamos el estudio empírico que nos permitirá determinar las técnicas de medición de riesgo de mercado que mejor se comportan en situaciones críticas. Para ello empezamos describiendo la base de datos utilizada de la que extraeremos las distintas muestras de estimación y contraste, para, seguidamente, estimar el modelo de comportamiento de los rendimientos de la cartera de mercado, necesario para, finalmente, aplicar las distintas técnicas descritas en el apartado anterior y en diferentes escenarios.

### 3.1. DATOS

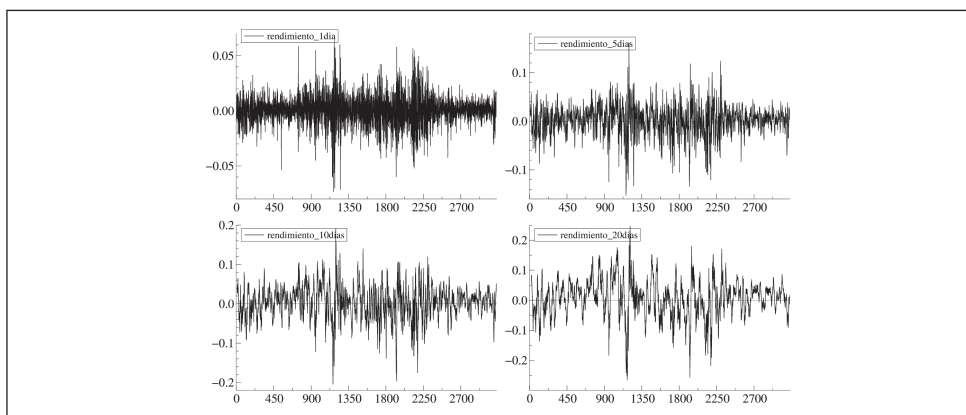
La muestra seleccionada del IBEX-35 va desde el 3 de enero de 1994 hasta el 1 de julio de 2008. Dicha muestra se ha dividido en dos partes. La primera, del 3 de enero de 1994 hasta el 30 de junio de 2006, es decir, doce años y medio, se tomará como base inicial de cálculo para la primera estimación. A medida que se avance en el tiempo se eliminará de la muestra inicial el dato más antiguo y se incorporará el siguiente, a fin de mantener constante el tamaño muestral. Así obtendremos estimaciones del riesgo para cada uno de los días de negociación que median entre el 1 de julio de 2006 y el 1 de julio de 2008, dos de los años de mayor turbulencia del índice y que constituyen la base de *backtesting* o periodo de contrastación.

GRÁFICO 1A  
IBEX-35 (DESDE EL 3 DE ENERO DE 1994 HASTA EL 1 DE JULIO DE 2008)



NOTA: La línea vertical indica el primer momento de estimación, es decir, los datos a la izquierda de la línea son la base de estimación inicial (3 de enero de 1994 hasta el 30 de junio de 2006), mientras que los datos a la derecha son los empleados para analizar las técnicas de medición de riesgos (*backtesting*), e irían desde el 1 de julio de 2006 hasta el 1 de julio de 2008.

GRÁFICO 2  
RENDIMIENTOS DEL IBEX-35 (DESDE EL 3 DE ENERO DE 1994 HASTA EL 1 DE JULIO DE 2008)



NOTA: Los rendimientos se han calculado como la diferencia del logaritmo del valor del índice en un instante  $t$  frente a otro momento anterior uno, cinco, diez y veinte días. En el gráfico puede observarse como existen momentos de elevada volatilidad y otros en los que la misma disminuye, es lo que se denomina «clústers de volatilidad».

Para evidenciar la situación de crisis del mercado durante el período de *backtesting* seleccionado, justificándose así la muestra objeto de estudio, comparamos dicho período con, por ejemplo, los dos considerados en Hernández (2003), uno de volatilidad media y otro de volatilidad alta. Los resultados de los estadísticos estimados para los rendimientos diarios pueden verse en la Tabla 1.

**TABLA 1**  
**COMPARATIVA MUESTRAL**

<i>Estudio</i>	<i>Hernández (2003)-I</i>	<i>Hernández (2003)-II</i>	<i>Este trabajo</i>
Fecha inicial	4 de mayo de 1998	3 de agosto de 1998	3 de julio de 2006
Fecha final	31 de julio de 1998	30 de octubre de 1998	1 de julio de 2008
media	0,07%	-0,28%	0,00%
desviación	1,34%	3,02%	1,21%
asimetría	-0,39	-0,20	-0,50
curtosis	2,95	2,87	9,22
máximo	2,34%	6,47%	6,72%
mínimo	-3,78%	-7,33%	-7,84%

Como podemos observar, el primer período de Hernández (2003) es el que muestra menor volatilidad y atípicos. Ahora bien, su segundo período muestra similares máximos y mínimos con respecto al considerado en este trabajo. Por el contrario, es el de mayor dispersión de los tres, esto es, dicho período sería válido para hacer una prueba de stress, si el rendimiento fuese normal, ya que la varianza sería una medida idónea del riesgo. No obstante, como la misma autora señala (Hernández, 2003: 1028), los rendimientos considerados no son gaussianos, de tal modo que el riesgo o valor extremo en la cola de pérdidas no está sujeto solo al segundo momento, siendo el cuarto momento o curtosis el que mide el grosor de la cola de la distribución; en este sentido, nuestro período de *backtesting* presenta la curtosis, además de la asimetría, más elevada.

En la Tabla 2 pueden verse los resultados del análisis estadístico de la muestra inicial (3 de enero de 1994 a 30 de junio de 2006), con el que se pretende determinar si el IBEX-35 presenta o no los hechos estilizados anteriormente mencionados, los rendimientos analizados son no superpuestos (*non-overlapping*) para cada uno de los horizontes temporales de medición considerados, es decir, uno, cinco, diez y veinte días.

**TABLA 2**  
**ANÁLISIS ESTADÍSTICO-DESCRIPTIVO DE LA MUESTRA**

<i>Estadístico</i>	<i>1 día</i>	<i>5 día</i>	<i>10 días</i>	<i>20 días</i>
Observaciones	3.127	612	312	156
Mínimo	-0,073	-0,116	-0,175	-0,225
Máximo	0,065	0,129	0,137	0,166

(Continúa pág. sig.)

**TABLA 2 (cont.)**  
ANÁLISIS ESTADÍSTICO-DESCRIPTIVO DE LA MUESTRA

<i>Estadístico</i>	1 día	5 día	10 días	20 días
Media	0,000	0,002	0,004	0,007
Desviación estándar	0,013	0,029	0,043	0,058
Asimetría	-0,163	-0,218	-0,486	-0,453
Kurtosis	5,673	4,440	4,278	4,374
Jarque-Bera test Normalidad	938,76(**)	691,14(**)	33,52(**)	17,60(**)
Autocorrelación test	12,048(*)	12,416(*)	3,150	3,775
Autocorrelación de los cuadrados test	712,797(**)	91,373(**)	27,246(**)	16,557(**)
Heterocedasticidad test	171,53(**)	17,107(**)	13,628(**)	11,22(**)
Estacionariedad (valor crítico 1%: -3,43)	-18,149(**)	-8,536(**)	-5,717(**)	-3,910(**)

Nota: Los rendimientos son *non-overlapping*. Las hipótesis nulas de cada test son que los rendimientos siguen una distribución normal, no presentan autocorrelación (Box-Pierce con cinco retardos), tampoco sus cuadrados (Box-Pierce con cinco retardos), no tienen heterocedasticidad (LM-test con dos retardos) y son no estacionarias (ADF aumentado con 4 retardos) o I(1).

(\*) Representa que la hipótesis nula se rechaza al 5% de nivel de confianza y (\*\*) al 1%.

Puede observarse en la Tabla 2 que las series de rendimientos no son normales; no presentan autocorrelación; el cuadrado de los rendimientos sí muestra autocorrelación, o lo que es igual, el momento de orden dos es dinámico en el tiempo; el test de heterocedasticidad nos indica que los cuadrados de los residuos retardados influirán en la varianza; y finalmente, se comprueba que las series son todas ellas estacionarias. Por tanto, el comportamiento del índice en el período inicial no se corresponde con el de una distribución normal, a pesar de no incluir los dos años de la muestra con mayor turbulencia.

### 3.2. ESTIMACIÓN DEL MODELO

Seguidamente se estiman los parámetros del proceso AR(1)-GARCH(1,1) para cada una de las series de rendimientos. En la Tabla 3 se muestran los resultados de la primera estimación <sup>(2)</sup> a 30 de junio de 2006.

**TABLA 3**  
PARÁMETROS ESTIMADOS DEL MODELO AR(1)-GARCH(1,1)

PARÁMETROS	1 día		5 días		10 días		20 días	
	valor	t-value	valor	t-value	valor	t-value	valor	t-value
<i>constant-mean</i>	0,0007	3,69	0,0026	2,53	0,0045	2,10	0,0083	1,96
<i>AR (1)</i>	0,0343	1,86	0,0158	0,39	0,0221	0,38	0,0332	0,44

(Continúa pág. sig.)

(2) Aunque sólo se reporta la primera estimación de las realizadas, se realizaron estimaciones para cada uno de los días del período de *backtesting* (desde el 1 de julio de 2006 hasta el 1 de julio de 2008). Cabe señalar al respecto, que los resultados de los parámetros no mostraron variaciones significativas con respecto a los valores iniciales (a nivel de tercer decimal), probablemente por el tamaño muestral con el que se estima (doce años y medio).



**TABLA 3 (cont.)**  
**PARÁMETROS ESTIMADOS DEL MODELO AR(1)-GARCH(1,1)**

PARÁMETROS	1 día		5 días		10 días		20 días	
	valor	t-value	valor	t-value	valor	t-value	valor	t-value
constant-variance (x10 <sup>4</sup> )	0,0220	2,894	0,1536	1,016	0,3540	1,105	1,0586	1,159
ARCH(1)	0,0962	6,024	0,0930	2,213	0,0725	3,500	0,1311	2,737
GARCH(1)	0,8929	51,210	0,8911	17,000	0,9082	34,150	0,8427	26,290
log-likelihood	9489,142		1367,896		557,368		229,517	
Autoc. Resid.	5,216		5,280		0,595		2,327	
Autoc. Resid. Sqr.	5,073		4,865		2,728		3,10	

NOTA: Los rendimientos son *non-overlapping*. Las hipótesis nulas de los tests son que los residuos no presentan autocorrelación (Box-Pierce con cinco retardos) y tampoco sus cuadrados (Box-Pierce con cinco retardos).

(\*) Representa que la hipótesis nula se rechaza al 5% de nivel de confianza y (\*\*) al 1%.

Como puede comprobarse los rendimientos diarios presentan una constante significativa pero nula desde un prisma económico, y los parámetros de autorregresión no son significativos, tal y como se preveía a partir de los resultados de los test de autocorrelación. En todos los plazos los parámetros del proceso GARCH(1,1) fueron significativos. A continuación, en la Tabla 4, mostramos los estadísticos de los residuos tipificados.

**TABLA 4**  
**ANÁLISIS DESCRIPTIVO ESTADÍSTICO DE LOS RESIDUOS TIPIFICADOS**

Estadístico	1 día	5 día	10 días	20 días
Observaciones	3127	612	312	156
Mínimo	-6,868	-4,106	-4,004	-3,385
Máximo	4,460	2,677	2,244	2,638
Media	-0,030	-0,028	-0,014	-0,008
Desviación estándar	0,999	0,997	0,998	1,000
Asimetría	-0,801	-0,954	-0,854	-0,308
Kurtosis	5,013	5,578	4,593	3,619
Jarque-Bera test Normalidad	43,00(**)	66,85(**)	35,43(**)	4,959
Autocorrelación test	7,598	9,065	2,693	2,327
Autocorrelación de los cuadrados test	3,849	1,707	1,728	3,100
Heterocedasticidad test	0,175	0,479	0,459	1,316
Estacionariedad (-3,43)	-4,268(**)	-3,873(**)	-3,830(**)	-3,935(**)

NOTA: Las hipótesis nulas de cada test son que los rendimientos siguen una distribución normal, no presentan autocorrelación (Box-Pierce con cinco retardos), tampoco sus cuadrados (Box-Pierce con cinco retardos), no tienen heterocedasticidad (LM-test con dos retardos) y son no estacionarias (ADF aumentado con retardos retardos) o I(1).

(\*) representa que la hipótesis nula se rechaza al 5% de nivel de confianza y (\*\*) al 1%.

Así, los residuos tipificados son de media cero y varianza unitaria, no presentando autocorrelación, ni heterocedasticidad, ni varianza condicional. Por tanto, únicamente persiste la leptokurtosis o no-normalidad.

Si en lugar de trabajar con rendimientos no superpuestos, hubiésemos calculado los rendimientos de manera superpuesta, lo cual nos hubiese permitido tener un tamaño muestral mayor, se habrían introducido distorsiones en el comportamiento de la serie de rendimientos. Para contrastar este hecho graficamos las funciones de autocorrelación (FAC) y de autocorrelación parcial (FACP) para los horizontes temporales que se utilizan en el análisis ulterior en el Gráfico 2. Como se observa, surge un problema de media móvil en función del horizonte temporal, ya que hemos introducido una condicionalidad no existente.

Una solución estándar al problema derivado de la superposición de datos, superposición que se hace necesaria en muestras de contrastación reducidas y horizontes temporales de medición del riesgo grandes, es el re-escalamiento (*scaling*) de los resultados obtenidos para el horizonte temporal más corto, un día, al resto de horizontes temporales [Brummelhuis y Kaufmann (2007)]. En este contexto, el procedimiento de re-escalamiento que se utilizará es el propuesto por Drost y Nijman (1993) para los procesos GARCH(1,1), descrito en el Anexo.

Los resultados obtenidos de este re-escalamiento para el primer día de estimación (el 30 de junio de 2006) se muestran en la Tabla 5. Como puede observarse, comparando los resultados de la Tabla 3 con los de la Tabla 5, los valores obtenidos del re-escalamiento y los estimados directamente sobre muestras no superpuestas, no coinciden, siendo menor la condicionalidad de la varianza en el caso del re-escalamiento, y por tanto, mayor el efecto de los residuos retardados. Esto puede ser especialmente relevante en las situaciones de *shocks* de mercado.

TABLA 5  
RE-ESCALADO DE PARÁMETROS GARCH(1,1)

<i>Drost-Nijman</i>	5 días	10 días	20 días
constant-variance ( $\times 10^4$ )	0,5392	2,0989	7,9574
ARCH(1)	0,1315	0,1515	0,1628
GARCH(1)	0,8149	0,7441	0,6393

Finalmente, estimaremos, tal y como se describe en el Anexo, a partir de los residuos tipificados de los procesos AR-GARCH estimados, los parámetros de las distribuciones extremas (GEV y GP) necesarios para la aplicación de algunas de las medidas de riesgo consideradas. Los resultados de estas estimaciones se muestran en la Tabla 6.

TABLA 6  
PARÁMETROS ESTIMADOS DE LAS DISTRIBUCIONES EXTREMAS

<i>Parámetros</i>	GEV-1	GEV-5	GEV-10	GEV-20	GP-1	GP-5	GP-10	GP-20
SHAPE	0,6385	0,5976	0,5992	0,6823	0,6385	0,5976	0,5992	0,6823

(Continúa pág. sig.)

**TABLA 6 (cont.)**  
**PARÁMETROS ESTIMADOS DE LAS DISTRIBUCIONES EXTREMAS**

Parámetros	GEV-1	GEV-5	GEV-10	GEV-20	GP-1	GP-5	GP-10	GP-20
SCALE	-1,7936	-1,9400	-2,2471	-2,8308	-1,7936	-1,9400	-2,2471	-2,8308
LOCATION	0,4956	0,5118	0,8928	1,5445	6,7870	6,8923	6,9334	7,1276

NOTA: El número que acompaña a cada distribución (GEV y GP) es horizonte temporal correspondiente a la serie de rendimientos tipificados ( $z$ ) empleados en la estimación.

### 3.3. RESULTADOS

Las estimaciones del riesgo se realizan para cuatro niveles de confianza: 95%, 97,5%, 99% y 99,9%. Y ello a su vez para cuatro horizontes temporales: 1, 5, 10 y 20 días. Realizadas estas dieciséis estimaciones en cada día de negociación del período de *backtesting*, comparamos el riesgo previsto por cada técnica con el resultado que realmente tuvo lugar, contabilizando los excesos, es decir, las fechas en las que la pérdida real superó la estimada. Después, se divide este número de excesos entre el total de observaciones del período de comprobación (*backtesting*), obteniéndose el porcentaje de excesos, que, en el caso de que las técnicas sean apropiadas, no debería superar al complemento a la unidad del nivel de confianza para el que se estimó el riesgo. Los porcentajes así obtenidos aparecen en la Tabla 7.

**TABLA 7**  
**PORCENTAJE DE PÉRDIDAS EXCEDIDAS**

Horizonte total observ.	1d 507	5d 503	5d_DN 503	10d 498	10d_DN 498	20d 488	20d_DN 488
Nivel confianza	<i>VaR-paramétrico Normal</i>						
95%	5,72%	8,15%	7,16%	6,63%	4,02%	10,86%	7,17%
97,50%	3,75%	6,16%	4,37%	4,22%	2,01%	8,81%	3,89%
99%	2,17%	2,78%	2,19%	2,01%	1,00%	6,15%	3,07%
99,90%	0,59%	0,99%	0,60%	0,80%	0,40%	3,48%	1,02%
	<i>VaR-paramétrico Normal con extensión Cornish-Fisher</i>						
95%	1,58%	1,19%	0,80%	1,41%	0,60%	8,61%	3,69%
97,50%	0,59%	0,99%	0,60%	0,80%	0,60%	6,15%	2,07%
99%	0,59%	0,60%	0,40%	0,60%	0,20%	3,89%	1,05%
99,90%	0,39%	0,40%	0,20%	0,20%	0,20%	2,46%	0,61%
	<i>Conditional VaR-paramétrico Normal</i>						
95%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,41%	0,00%
97,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,20%	0,00%
99%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
99,90%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

(Continúa pág. sig.)

**TABLA 7 (cont.)**  
**PORCENTAJE DE PÉRDIDAS EXCEDIDAS**

<i>Horizonte total observ.</i>	<i>1d</i> 507	<i>5d</i> 503	<i>5d_DN</i> 503	<i>10d</i> 498	<i>10d_DN</i> 498	<i>20d</i> 488	<i>20d_DN</i> 488
<i>Simulación Histórica Ponderada</i>							
95%	7,69%	11,33%	15,11%	12,25%	21,08%	19,88%	28,69%
97,50%	5,33%	10,14%	13,12%	9,64%	18,88%	17,01%	26,23%
99%	4,54%	7,16%	11,13%	7,23%	15,86%	14,34%	23,77%
99,90%	2,56%	4,17%	6,76%	5,62%	11,65%	10,66%	18,85%
<i>Simulación Histórica Filtrada</i>							
95%	5,52%	8,35%	5,36%	7,23%	5,22%	9,84%	5,40%
97,50%	3,55%	3,98%	2,17%	4,42%	2,02%	6,35%	2,94%
99%	1,58%	1,79%	1,58%	2,21%	1,02%	3,89%	1,48%
99,90%	0,39%	0,60%	0,19%	1,61%	0,61%	2,46%	0,43%
<i>Generalizada de Eventos Extremos (GEV)</i>							
95%	2,76%	2,98%	1,39%	1,20%	0,00%	0,20%	0,00%
97,50%	2,37%	2,98%	1,19%	1,00%	0,00%	0,20%	0,00%
99%	2,17%	2,78%	0,99%	0,80%	0,00%	0,20%	0,00%
99,90%	2,17%	2,78%	0,99%	0,80%	0,00%	0,00%	0,00%
<i>Generalizada de Pareto (GP)</i>							
95%	0,59%	0,60%	0,00%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%
97,50%	0,59%	0,60%	0,00%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%
99%	0,59%	0,60%	0,00%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%
99,90%	0,59%	0,60%	0,00%	0,20%	0,00%	0,00%	0,00%
<i>Shortfall (GP)</i>							
95%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
97,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
99%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
99,90%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

NOTA: DN indica que la varianza condicional se estimó mediante re-escalamiento de Drost y Nijman.

Podemos identificar tres grupos de técnicas en función de sus porcentajes de pérdidas excedidas: las que no presentan excesos o son insignificantes (CVaR-paramétrico, GEV, GP y Shortfall-GP); las que muestran excesos alrededor del porcentaje aceptable (Cornish-Fisher y SHF); y las que sus excesos superan sobradamente los porcentajes admisibles (VaR-paramétrico normal y SHW).

Al mismo tiempo, cabe destacar respecto a los horizontes de medición superiores a un día que el re-escalamiento de parámetros presenta excesos más aceptables frente a la estimación sobre muestras no superpuestas. La justificación de esto se halla, como se indicó

anteriormente, en el mayor peso de los shocks frente a la condicionalidad de la varianza, lo que unido a los fuertes shocks del período muestral permiten recoger movimientos del índice de mayor amplitud.

Si bien es importante que la técnica no presente excesos de pérdidas sobre los niveles de confianza, también lo es que, en el caso de sufrirlos, su tamaño sea relativamente pequeño, y en el caso de no sufrirlos, que el riesgo estimado no exceda en un tamaño importante la pérdida final, ya que ello conllevaría un consumo innecesario de fondos propios, con la consiguiente menor rentabilidad ajustada al riesgo.

Para contrastar estos dos hechos, dejamos al margen las técnicas que superaron el porcentaje de pérdidas excedidas aceptable en función del nivel de confianza y, determinamos el porcentaje medio de exceso en caso de pérdida (*Exc*) y la parte no cubierta (*Cub*) en caso de que la pérdida real supere el riesgo estimado:

$$Exc_j\% = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \left( \frac{Risk_{i,j} - R_i}{Risk_{i,j}} \Big|_{R_i < 0} \right) > 0\% \tag{1.3}$$

$$Cub_j\% = \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} \left( \frac{Risk_{i,j} - R_i}{R_i} \Big|_{R_i < 0} \right) < 0\%$$

en donde *j* es cada una de las técnicas de medición del riesgo, *Risk* es la estimación de la técnica *j* para el instante *i*, *R* es el resultado real en el instante *i* (que deberá ser pérdida), *n* es el número de excesos de la técnica *j* condicionado a que *R* sea pérdida, y *m* el número de defectos de la técnica *j* condicionado a que *R* sea pérdida.

Los porcentajes medios de excesos fueron los recogidos en la Tabla 8. Por su parte los porcentajes medios de defectos, o pérdida real no cubierta, fueron los expresados en la Tabla 9.

**TABLA 8**  
**PORCENTAJE MEDIO DE EXCESO DEL RIESGO ESTIMADO**

Horizonte	1d	5d_DN	10d_DN	20d_DN
Nivel confianza	<i>VaR-paramétrico con extensión Cornish-Fisher</i>			
95%	72,86%	69,18%	67,79%	66,47%
97,50%	75,10%	73,02%	71,91%	70,16%
99%	78,28%	76,02%	74,47%	72,39%
99,90%	81,66%	79,53%	78,09%	75,35%
<i>Conditional VaR-paramétrico Normal</i>				
95%	86,62%	83,69%	85,01%	84,19%
97,50%	87,88%	85,55%	86,65%	85,85%
99%	89,68%	87,60%	88,46%	87,66%

(Continúa pág. sig.)

**TABLA 8 (cont.)**  
**PORCENTAJE MEDIO DE EXCESO DEL RIESGO ESTIMADO**

<i>Horizonte</i>	<i>1d</i>	<i>5d_DN</i>	<i>10d_DN</i>	<i>20d_DN</i>
99,90%	92,75%	91,08%	91,52%	90,71%
<i>Simulación Histórica Filtrada</i>				
95%	65,79%	60,96%	61,51%	65,89%
97,50%	68,69%	62,10%	64,43%	69,77%
99%	73,21%	65,67%	68,58%	71,75%
99,90%	81,53%	65,53%	69,05%	77,54%
<i>Generalizada de Eventos Extremos (GEV)</i>				
95%	69,67%	64,56%	72,57%	80,29%
97,50%	69,71%	64,97%	73,34%	80,88%
99%	69,99%	65,32%	74,01%	81,38%
99,90%	70,83%	66,30%	74,97%	82,07%
<i>Generalizada de Pareto (GP)</i>				
95%	79,21%	77,34%	81,51%	83,41%
97,50%	79,24%	77,38%	81,54%	83,44%
99%	79,26%	77,40%	81,56%	83,45%
99,90%	79,27%	77,41%	81,57%	83,46%

NOTA: Sólo se han considerado las técnicas que presentaron un número de excesos similar al admitido para cada nivel de confianza, de ahí que no se recoja *VaR-normal*, *SHW* y las estimaciones a partir de muestras no superpuestas. Tampoco se ha considerado el *Shortfall-GP*, puesto que el *VaR-GP* no presentaba excesos, de manera que como *Shortfall* es una medida más extrema del riesgo, lógicamente sus excesos en cuantía serían superiores.

**TABLA 9**  
**PORCENTAJE MEDIA DE DEFECTO EN LA ESTIMACIÓN DEL RIESGO**

<i>Horizonte</i>	<i>1d</i>	<i>5d_DN</i>	<i>10d_DN</i>	<i>20d_DN</i>
<i>Nivel confianza</i>	<i>VaR-paramétrico con extensión Cornish-Fisher</i>			
95%	-23,21%	-23,35%	-22,80%	-26,51%
97,50%	-21,80%	-18,02%	-11,61%	-18,98%
99%	-20,53%	-15,93%	-10,12%	-14,89%
99,90%	-19,24%	-6,87%	-1,28%	-13,30%
<i>Conditional VaR-paramétrico Normal</i>				
95%	-5,91%	N.D.	N.D.	N.D.
97,50%	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

(Continúa pág. sig.)

**TABLA 9**  
**PORCENTAJE MEDIA DE DEFECTO EN LA ESTIMACIÓN DEL RIESGO**

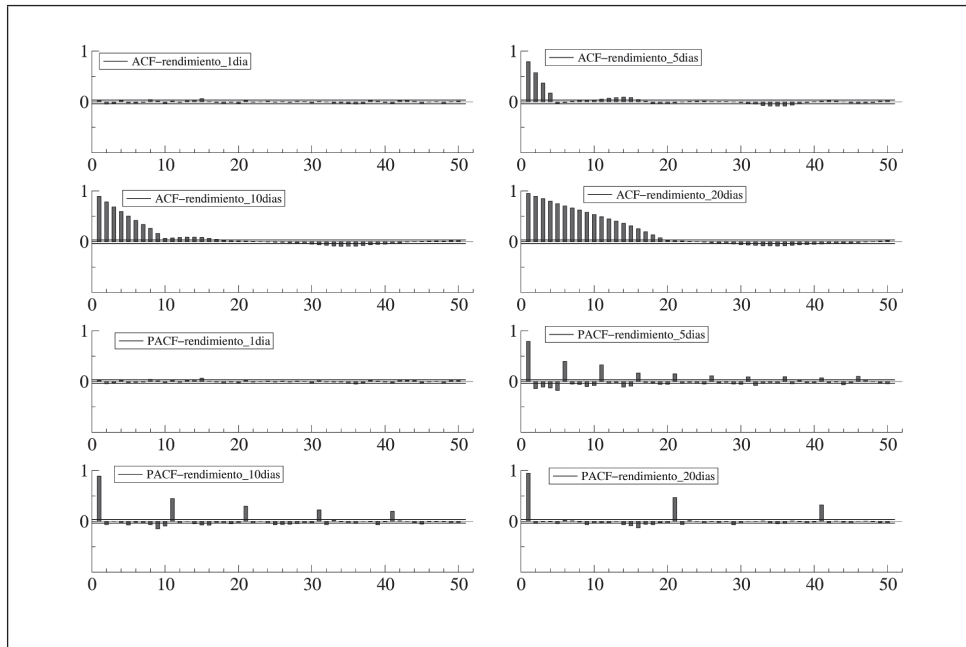
<i>Horizonte</i>	<i>1d</i>	<i>5d_DN</i>	<i>10d_DN</i>	<i>20d_DN</i>
99%	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
99,90%	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
<i>Simulación Histórica Filtrada</i>				
95%	-26,57%	-13,60%	-14,88%	-18,50%
97,50%	-22,30%	-12,59%	-17,29%	-11,59%
99%	-21,01%	-9,88%	-12,69%	-10,90%
99,90%	-19,01%	-8,60%	-8,13%	-8,77%
<i>Generalizada de Eventos Extremos (GEV)</i>				
95%	-23,12%	-13,76%	N.D.	N.D.
97,50%	-21,16%	-14,05%	N.D.	N.D.
99%	-20,86%	-13,98%	N.D.	N.D.
99,90%	-19,72%	-12,50%	N.D.	N.D.
<i>Generalizada de Pareto (GP)</i>				
95%	-21,36%	N.D.	N.D.	N.D.
97,50%	-21,23%	N.D.	N.D.	N.D.
99%	-21,16%	N.D.	N.D.	N.D.
99,90%	-21,11%	N.D.	N.D.	N.D.

NOTA: Sólo se han considerado las técnicas que presentaron un número de excesos similar al admitido para cada nivel de confianza, de ahí que no se recoja *VaR-normal*, *SHW* y las estimaciones a partir de muestras no sobre-puestas. Tampoco se ha considerado el *Shortfall-GP*, puesto que el *VaR-GP* no presentaba excesos, de manera que como *Shortfall* es una medida más extrema del riesgo, lógicamente sus excesos en cuantía serían superiores. La expresión *N.D.* indica que no hay datos u observaciones en los que la pérdida haya sido superior al riesgo estimado.

Analizando en conjunto ambas tablas (Tabla 8 y Tabla 9) podemos indicar que en términos de pérdidas no cubiertas por la estimación, *Condiciona-VaR* paramétrico normal presenta los mejores resultados para todos los horizontes temporales. Ahora bien, si incluimos el coste de oportunidad por el exceso en las estimaciones respecto a las pérdidas reales observadas, comprobamos como para horizontes temporales de un día GEV muestra el mejor resultado combinado; en cambio para horizontes temporales mayores la SHF presenta los mejores resultados, acompañada para niveles de confianza altos de la GEV.

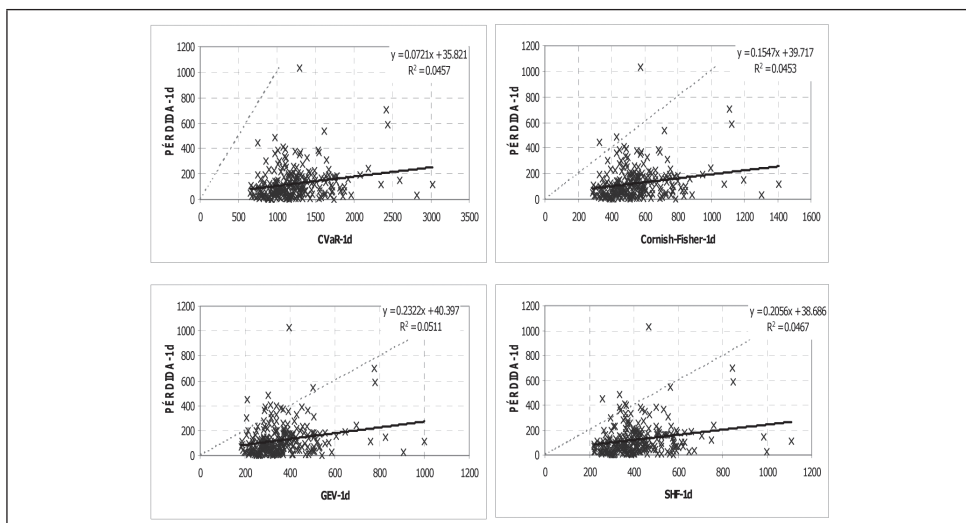
Para corroborar estos resultados hemos tomado, para cada horizonte de medición, los instantes temporales dentro del período crítico seleccionado en que el IBEX-35 presentó pérdidas, y las hemos ordenado en valor absoluto de menor a mayor, junto a la estimación que de las mismas hicieron cada una de las técnicas anteriores. Los resultados para el nivel de confianza del 99%, elegido por ser el exigido por la normativa, aparecen en el Gráfico 3.

**GRÁFICO 2**  
**FUNCIONES DE AUTOCORRELACIÓN**



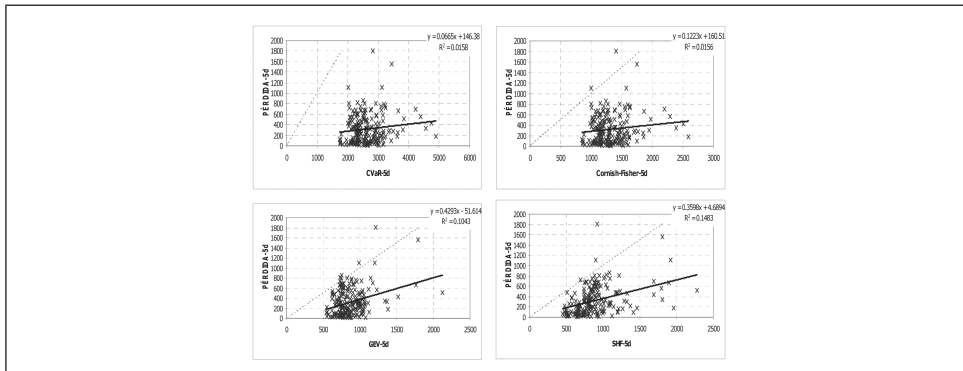
NOTA: representa la diferencia, en este caso del logaritmo del valor del IBEX-35, y el número de días que acompaña es el orden de la misma, esto es  $\ln(I_t) - \ln(I_{t-d})$ , donde  $d$  sería el orden del rendimiento. La estimación se ha realizado con datos superpuestos (*overlapping*), de manera que el tamaño muestral sería de  $N$  (total observaciones) menos el orden de operador diferencia.

**GRÁFICO 3.1.**  
**RELACION LINEAL ENTRE ESTIMACIÓN DEL RIESGO Y PÉRDIDA H = 1**

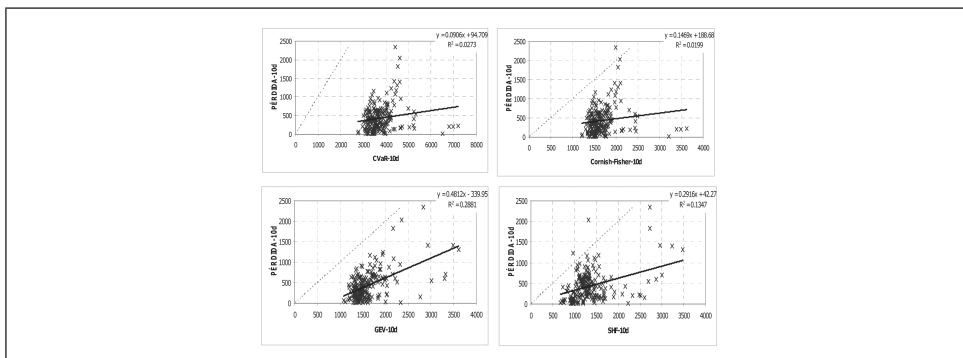




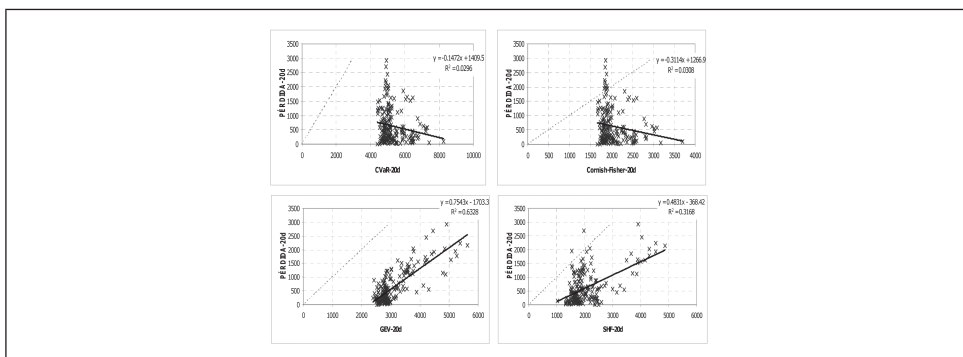
**GRÁFICO 3.2.**  
**RELACIÓN LINEAL ENTRE ESTIMACIÓN DEL RIESGO Y PÉRDIDA H = 5**



**GRÁFICO 3.3.**  
**RELACIÓN LINEAL ENTRE ESTIMACIÓN DEL RIESGO Y PÉRDIDA H = 10**



**GRÁFICO 3.4.**  
**RELACIÓN LINEAL ENTRE ESTIMACIÓN DEL RIESGO Y PÉRDIDA H = 20**



NOTA: Los puntos observados en cada gráfico deberían estar próximos a la recta de regresión lo cual indicaría que la técnica en cuestión presenta una buena predicción de las pérdidas realizadas. Por otro lado, un número elevado de observaciones en la parte superior izquierda de cada gráfico mostraría una infravaloración de la pérdida por parte de la técnica empleada, mientras que si dichas observaciones se producen en la parte inferior derecha la técnica sobreestimaría la pérdida.

A priori, cabría esperar que la recta de regresión entre las pérdidas observadas y las correspondientes estimaciones tuviese pendiente positiva y cuánto más próxima a la unidad mejor. Como podemos observar, solo con un nivel de confianza elevado y con las técnicas GEV y SHF se observa un comportamiento similar al descrito. Destaca además que en el horizonte de veinte días, la pendiente de *CVaR* y Cornish-Fisher, se vuelve negativa, corroborándose así que GEV y SHF parecen ser las técnicas más adecuadas en situaciones de crisis del mercado.

#### 4. CONCLUSIONES

La estimación de riesgos es una herramienta necesaria en la gestión de operaciones del mercado. Para llevarla a cabo existen multitud de técnicas que pueden aplicarse. Ahora bien, es preciso que en la elección de las técnicas se tome en consideración el comportamiento del rendimiento del activo cuyo riesgo se quiere medir. De este modo, los estudios muestran que la distribución normal no parece la elección adecuada para describir dicho comportamiento. Por ello, y ante las características de los activos financieros, conocidas como *stylized facts*, en este trabajo se han analizado diferentes técnicas de medición del riesgo de mercado que pueden aplicarse bajo dicho comportamiento y ante situaciones críticas del mercado.

Las técnicas analizadas son concretamente el *VaR* y el *Condicional-VaR* normal, la extensión Cornish-Fisher, la simulación histórica ponderada y filtrada y las distribuciones de eventos extremos Generalizada de Eventos Extremos y Generalizada de Pareto.

Para la comparativa de estas técnicas ante situaciones críticas del mercado, se han tomado dos de los años de mayor volatilidad (julio-2006 hasta julio-2008) del IBEX-35, realizándose una estimación diaria para diferentes niveles de confianza (95%, 97,5%, 99% y 99,9%) y horizontes temporales (uno, cinco, diez y veinte días), procediendo tanto a la utilización de muestras no superpuestas como a la aplicación de técnicas de re-escalamiento de procesos GARCH(1,1) que finalmente se han mostrado más adecuadas en el contexto del análisis realizado.

Los resultados indican que la estimación de riesgos mediante la Generalizada de Eventos Extremos es la más consistente en cuanto a número de excesos y pérdida no cubierta en caso de exceso; si además se incluye el criterio de coste de oportunidad del exceso de estimación frente a la pérdida real, hemos de añadir a la anterior la técnica de simulación histórica filtrada. Estos resultados muestran lo que cabría esperar después de confirmarse los hechos estilizados y ante el crítico período muestral seleccionado.

Podemos finalizar este trabajo reseñando algunos importantes hechos en la medición de riesgos de mercado para el caso de situaciones críticas. En primer lugar, cuando existe condicionalidad en el momento de segundo orden, aproximar el problema de *scaling* mediante reglas como la de la raíz cuadrada del tiempo, conlleva errores. En segundo término, es preciso considerar dicha condicionalidad, puesto que las técnicas que no lo hacen, como la simulación histórica no presentan resultados idóneos. En tercer lugar, tener en cuenta más momentos de la distribución, con el fin de aproximar mejor el comportamiento observado de la serie, no supone necesariamente resultados más ajustados al riesgo. En cuarto y últi-

mo término, indicar que, para obtener resultados que superen las pruebas de *backtesting*, emplear herramientas y distribuciones que aproximen el comportamiento de la serie en sus colas es tan necesario, o más, que modelizar convenientemente los rendimientos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANGELIDIS, T.; BENOS, A., y DEGIANNAKIS, S. 2005. The use of GARH models in VaR estimation. *Statistical Methodology* 2: 49-57.
- BALI, T., y THEODOSSIOU, P. 2007. A conditional-sgt-var approach with alternative garch models. *Annals of Operations Research* 151: 241-267.
- BAO, Y.; LEE, T.-H., y SALTOGLU, B. 2006. Evaluating predictive performance of value-at-risk models in emerging markets: a reality check. *Journal of Forecasting* 25: 101-128.
- BAO, Y.; LEE, T.-H.; SALTOGLU, B., y ULLAH, A. 2004. Bias of value-at-risk model. *Finance Research Letters* 1: 241-249.
- BARONE-ADESI, G.; GIANNOPOULOS, K., y VOSPER, L. 2000. *Filtering Historical Simulation Backtest Analysis*. Working Paper, University of Westminster.
- BERKOWITZ, J., y O'BRIEN, J. 2002. How Accurate are Value-at-Risk Models at Commercial Banks, *Journal of Finance* 57 (3): 1093-1111.
- BERKOWITZ, J.; O'BRIEN, J.; CHRISTOFFERSEN, P., y PELLETIER, D. 2006. Evaluating value-at-risk models with desk-level data. *Working Paper Series 010 Department of Economics*, North Carolina State University.
- BILLIO, M., y SARTORE, D. 2003. *Stochastic Volatility Models: A Survey with Applications to Option Pricing and Value at Risk*. West Sussex, UK: John Wiley.
- BOLLERSLEV, T., y WOOLDRIDGE, J. M. 1992. Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances. *Econometric Review* 11: 143-172.
- BOUDOUKH, J.; RICHARDSON, M., y WHITELAW, R. 1998. The Best of Both Worlds. *Risk* 11(5): 64-67.
- BRUMMELHUIS, R., y KAUFMANN, R. 2007. Time Scaling of Value-at-Risk in GARCH(1,1) and AR(1)-GARCH(1,1) Processes. *The Journal of Risk* 9(4): 39-94.
- CHAN, N. H.; DENG, S. J.; PENG, L., y XIA, Z. 2007. Interval estimation for the conditional value at risk based on garch models with heavy tailed innovations. *Journal of Econometrics* 137: 556-576.
- CONT, R. 2001. Empirical properties of assets returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1: 223-236.
- DIEBOLD, F. X.; HICKMAN, A.; INQUE, A., y SCHUERMAN, T. 1998. Scale models. *Risk* 11: 104-107.
- DROST, F. C., y NIJMAN, T. T. 1993. Temporal aggregation of GARCH processes. *Econometrica*, 61, 909-927.
- EBERLEIN, E.; KALLSEN, J., y KRISTEN, J. 2003. Risk management based on stochastic volatility. *Journal of Risk* 5: 19-44.
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPPELBERG, C., y MIKOSCH, T. 1997. *Modelling extremal events for insurance and finance*. New York: Springer.
- HERNÁNDEZ SÁNCHEZ, M. 2003. El efecto nivel de riesgo en las metodologías VaR. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* XXXII (119): 1013-1051.
- HILL, B. M. 1975. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics* 3: 1163-1174.

- HOSKING, J. R. M.; WALLIS, H., y WOOD, E. 1985. Estimation of Generalized Extreme Value Distribution by Method of Probability Weighted Moments. *Technometrics* 27: 251-261.
- JOHNSON, N.; KOTZ, S., y BALAKRISHNAN, N. 1994. *Continuous Univariate Distributions*. 2nd Edition, Vol. 1, New York: John Wiley.
- JORION, P. 2000. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. 2nd Edition, New York: McGraw Hill.
- JU, X., y PEARSON, N. D. 1999. Using value-at-risk to control risk taking: How wrong can you be? *Journal of Risk* 1: 5-36.
- KRAUSE, A. 2003. Exploring the limitations of value at risk: How good is it in practice? *Journal of Risk Finance* 4 (2): 19-28.
- KUESTER, K.; MITTNIK, S., y PAOLELLA, M. 2006. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics* 4 (1), 53-89.
- LIMA, R., y NERI, B. 2007. Comparing value-at-risk methodologies. *Brazilian Review of Econometrics* 27, 1-25.
- MCNEIL, A., y FREY, R. 2000. Estimation of tail-related risk measures for heterocedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance* 7: 271-300.
- MITTNIK, S., y PAOLELLA, M. 2000. Conditional density and value-at-risk prediction of Asian currency exchange rates. *Journal of Forecasting* 19: 313-333.
- PEROTE, J. 2003. Value at Risk of non-normal portfolios. *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 115: 290-310.
- POWNALL, R., y KOEDIJK, K. 1999. Capturing downside risk in financial markets: the case of the asian crisis. *Journal of International Money and Finance* 18: 853-870.
- ROCKAFELLAR, R. T., y URYASEV, S. 2002. Conditional Value at Risk for General Loss Distributions, *Journal of Banking and Finance* 26 (7): 1443-1471.
- SADORSKY, P., 2005. Stochastic volatility forecasting and risk management. *Applied Financial Economics* 15, 121-135.
- SARMA, M., T. S., y SHAH, A. 2003. *Selection of value at risk models*. *Journal of Forecasting* 22, 337-358.
- VAN DEN GOORBERGH, R. W. J. 1999. *Value at Risk analysis and least squares tail index estimation*. Research Memorandum WO&E, n.º 578. Amsterdam: De Nederlandsche Bank.
- VLAAR, P. J. G. 2000. Value at risk models for dutch bond portfolios. *Journal of Banking and Finance* 24(7), 1131-1154.

## ANEXO

El procedimiento de estimación del riesgo que seguiremos para un nivel de confianza  $q$  y un horizonte temporal  $H$  será el siguiente:

### 1. VAR PARAMÉTRICO NORMAL

En este caso se realizarán tres estimaciones en función del horizonte  $H$ , tratando de evitar el problema de *scaling* (ver Diebold *et al.* [1998]):

a) Estimaremos por máxima-verosimilitud el modelo AR(1)-GARCH(1,1) según la expresión (1.1) para los rendimientos diarios, de este modo:

$$x_t = \ln \frac{St}{S_{t-1}}$$

$$\hat{x}_t = a + bx_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Entonces el riesgo para dicho horizonte temporal sería:

$$VaR_{normal,t}^q = S_{t-1} [exp(\hat{x}_t + \hat{\sigma}_{t-1}^q) - 1]$$

b) El problema surge cuando  $H > 1$ , entonces existen varias posibilidades, entre las que destaca aplicar la regla de la raíz cuadrada de  $H$ , para transformar el riesgo de un día a un horizonte de  $H$  días. Ello puede conllevar graves errores, sobretodo si la distribución no es normal, o la serie de rendimientos presentase reversión a la media. Por ello, proponemos dos alternativas a dicha regla:

1. Volver a estimar el Modelo *AR-GARCH* sobre rendimientos de  $H$  días, y una vez estimado el modelo se operaría igual que para los rendimientos diarios. En este caso, y para evitar introducir distorsiones del tipo media móvil en el modelo, los rendimientos se tomarán no superpuestos (*non-overlapping*), entonces si el total de la muestra es de  $T$  precios, no obtendremos  $(T/H)$  rendimientos, sino  $(T/H)$  rendimientos:
2. Transformar los parámetros del proceso GARCH de un día al de  $H$  días como proponen Drost y Nijman (1993), y operar igual que para un día. Esta transformación es la siguiente:

$$\hat{\sigma}_{t,H}^2 = \omega_h + \alpha_h x_{t,H}^2 + \beta_h \hat{\sigma}_{t-1,H}^2$$

$$\omega_H = H\omega \frac{1 - (\alpha + \beta)^H}{1 - (\alpha + \beta)} \quad \alpha_H = (\alpha + \beta)^H - \beta_H$$

$$\frac{\beta_H}{1 + \beta_H^2} = \frac{\lambda_1 (\alpha + \beta)^H - \lambda_2}{\lambda_1 [1 + (\alpha + \beta)^{2H}] - 2\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = H(1 - \beta^2) + 2H(H - 1) \frac{(1 - \beta - \alpha)^2 (1 - \beta^2 - 2\beta\alpha)}{(kur - 1)[1 - (\alpha + \beta)^2]} +$$

$$+ 4 \frac{[H - 1 - H(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)H] [\alpha - \alpha\beta(\alpha + \beta)]}{1 - (\alpha + \beta)^2}$$

$$\lambda_2 = [\alpha - \alpha\beta(\alpha + \beta)] \frac{1 - (\alpha + \beta)^{2H}}{1 - (\alpha + \beta)^2}$$

La diferencia entre ambas aproximaciones estriba sobretodo en la consideración sobre la tendencia del rendimiento, es decir, la ecuación de la media.

- En el caso de la extensión Cornish-Fisher, simplemente sustituiremos  $z_{normal}^q$  por la expresión (1.2), habiendo estimado previamente la asimetría y la kurtosis sobre los rendimientos diarios tipificados observados, esto es:

$$\hat{z}_t = \frac{x_t - \hat{x}_t}{\hat{\sigma}_t} = \frac{x_t - (\hat{\alpha} + \hat{b}x_{t-1})}{\hat{\sigma}_t}$$

Ahora bien, cuando  $H$  sea mayor de un día entonces volvemos a tener las dos opciones anteriores, operar con rendimientos de  $H$  días y, transformar los parámetros GARCH.

- Condicional-VaR paramétrico normal, cuya expresión para  $H=1$  es:

$$CVaR_{normal}^q = S_{t-1} \left[ \exp \left[ -\frac{\sqrt{2\pi}}{1-q} \exp \left( -\frac{z_{normal}^q}{2} \right) \hat{\sigma}_t \right] - 1 \right]$$

En el caso de  $H > 1$  deberemos operar nuevamente con las dos opciones propuestas para el VaR paramétrico, es decir, re-estimar los parámetros sobre rendimientos de  $H$  días, o bien transformar la volatilidad condicional de un día en  $H$  días.

- La simulación histórica ponderada (*SHW*), requiere estimar para cada resultado histórico observado ( $y$ ) una ponderación ( $w$ ) función del instante temporal ( $i$ ) en que haya tenido lugar respecto del total de observaciones ( $T$ ) y, según un parámetro de *decay* ( $K$ ). Fijémonos que si  $K=1$  tendríamos la simulación histórica estándar. De este modo, y tomando  $K$  igual al parámetro de autorregresividad condicional del proceso GARCH(1,1) estimado para cada horizonte  $H$ , el VaR se estima como:

$$y_{i,H} = S_i - S_{i-H} \quad \forall i = H, \dots, T$$

$$w_i = \frac{1-K}{1-K^{T-H}} K^{T-H-i}$$

$$VaR_{SHW}^q = \inf \{ y_{i,H} | w_i \leq q \}$$

- La simulación histórica filtrada (*SHF*) se realiza en los siguiente pasos:

- Ordenar los valores tipificados observados ( $z$ ).
- Simular  $H$  (una por cada día del intervalo temporal) variables uniformes  $U(0,1)$
- Mediante la técnica de la transformada inversa, buscar entre los valores de  $z$  aquel cuyo percentil se corresponda con el valor simulado de la uniforme, obteniendo ( $z_{i,t}$ ).
- Determinar el rendimiento simulado para el siguiente día  $t$  a partir de:  $\forall t = 1, \dots, H \quad \hat{x}_{i,t} = \hat{\alpha} + \hat{b}x_{i,t-1} + \hat{\varepsilon}_{i,t} = \hat{\alpha} + \hat{b}x_{i,t-1} + z_{i,t}\hat{\sigma}_t$
- Repetir el proceso (*b-d*) un número elevado  $R$  de veces (10.000 en nuestro caso), y tomar el valor del correspondiente al percentil buscado, entonces el riesgo sería:

$$\forall i = 1, \dots, R \quad \text{prob.}(\hat{x}_{i,t}^q) = \text{prob.} \left( \sum_{t=1}^H \hat{x}_{i,t} \right) = 1 - q$$

$$VaR_{SHF}^q = S_{t-H} \left[ \exp(\hat{x}_{i,t}^q) - 1 \right]$$

Una importante diferencia entre *SHW* y *SHF*, es que en la primera no importa lo que ocurre entre el instante de medición y el del horizonte temporal, mientras que en el segundo se simula todo el recorrido. Así pues, *SHW* supone implícitamente que la posición podrá mantenerse todo el período *H* con independencia de lo que acontezca en el mercado.

6. La aplicación de la Teoría de los Valores Extremos requiere antes la estimación de los parámetros que definen las distribuciones Generalizada de Eventos Extremos (*GEV*) o la Generalizada de Pareto (*GP*). El procedimiento seguido es el siguiente:

a) Estimar el índice de la cola ( $\xi$ ), siguiendo la propuesta de Van den Goorbergh (1999), que empleando la aproximación de primer orden de la distribución empírica extrema de los rendimientos tipificados y ordenados, puede realizarse por mínimos cuadrados:

$$F(z) \cong a \cdot z^{-\xi}$$

$$\ln [F(z)] \cong \ln(a) - \xi \cdot \ln(z)$$

$$u_i = \ln[F(z_i)] - [\ln(a) - \xi \cdot \ln(z_i)]$$

$$\min. \sum_{i=1}^m u_i^2$$

b) Seguidamente emplearemos el estimador del índice de la cola de Hill (1975) para fijar el punto de inicio de la cola de la distribución de los rendimientos tipificados ( $z_{start}$ ):

$$\frac{1}{\xi} = H_k = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=0}^k \ln(|z_i|) - \ln(|z_k|) \Rightarrow z_{start} = \min(H_k - \xi^{-1})$$

c) A continuación determinaremos el resto de parámetros de las distribuciones por el método de los momentos ponderados por probabilidad [ver Hosking *et al.* (1985)]. Para ello:

1. Seleccionamos dentro de los *N* valores de *z* negativos (pérdidas), solo los que sean inferiores al inicio de la cola ( $z_{start}$ ) y, los ordenamos de menor a mayor en términos absolutos, obteniendo *M* observaciones ordenadas ( $M < N$ ).
2. Calculamos las ponderaciones para cada valor ordenado como:

$$w_{m,H} = \frac{m + 0,5}{M} \quad \forall m = 0, \dots, M - 1$$

3. Estimamos los parámetros como sigue:

$$A = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Z_{m,H} \quad B = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Z_{m,H} \cdot w_{m,H} \quad C = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Z_{m,H} \cdot w_{m,H}^2$$

$$\hat{\mu} = \frac{(2B - A)\xi}{\Gamma(1 + \xi)(1 - 2^\xi)} \sum Z_{m,H} \quad \hat{\Psi}_{GEV} = A + \frac{\hat{\mu}}{\xi} [1 - \Gamma(1 - \xi)] \quad \hat{\Psi}_{GP} = \frac{2AB}{A - 2B}$$

4. Calculamos el riesgo para cada distribución:

$$Z_{GEV}^q = \hat{\mu} - \frac{\hat{\Psi}_{GEV}}{\xi} \{1 - [-\ln(1 - q)]^\xi\}$$

$$Z_{GP}^q = Z_{start} - \frac{\hat{\mu}}{\xi} \left( \frac{M}{N} q^{-\frac{1}{\xi}-1} \right)$$

$$\text{MaxVaR}_{GEV}^q = S_{t-H} [\exp(\hat{\sigma} z_{GEV}^q) - 1]$$

$$\text{MaxVaR}_{GP}^q = S_{t-H} [\exp(\hat{\sigma} z_{GP}^q) - 1]$$

$$\text{Shortfall}_{GP}^q = S_{t-H} [\exp(\hat{\sigma} sh_{GP}^q) - 1]$$

Nuevamente, para el caso de  $H > 1$  trabajaremos con las dos posibilidades: bien a partir de rendimientos de  $H$  días, o bien a partir de rendimientos diarios acumulados de  $H$  días, y transformando los parámetros del GARCH diario.