REVISTA ESPAÑOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. XXXI, n.º 114
octubre-diciembre 2002
pp. 1179-1202

Salvador Cruz Rambaud
Universidad de Almería. Departamento de Dirección y Gestión de Empresas

María del Carmen Valls Martínez
Universidad de Almería. Departamento de Dirección y Gestión de Empresas

UN MODELO DE ASIGNACIÓN DE COSTES COMPARTIDOS EN SITUACIONES DE ECONOMÍA DE ESCALA (*)

RESUMEN

DETERMINADOS gastos de una empresa (limpieza, electricidad o renting, por ejemplo) tienen u ofrecen descuentos crecientes en función del volumen contratado. Este hecho hace pensar en la posibilidad de que varias empresas, o secciones dentro de una misma empresa, contraten conjuntamente estos servicios con el fin de aprovechar las economías de escala que surgen. El problema se plantea cuando hay que repartir de forma racional el coste total entre las empresas o secciones generadoras de dicho gasto. Habitualmente los descuentos o bonificaciones ofertadas van creciendo por tramos, lo que dificulta el planteamiento de

(*) Agradecemos los valiosos comentarios y sugerencias de dos evaluadores anónimos.

Recibido 25-01-01
Aceptado 25-10-01

ISSN 0210-2412

una metodología, porque generalmente cualquier sistema de reparto se basa en una función continua. Para ello, se utiliza el cálculo infinitesimal. El objetivo de este trabajo es ofrecer un método que permita distribuir costes de forma equitativa, resolviendo incluso situaciones en las que la función que da el coste sea discontinua con un número finito de saltos.

PALABRAS CLAVE

Distribución; Función de costes; Continuidad; Economías de escala.

ABSTRACT

Certain costs of a company (cleaning, electricity or renting, for example) present discounts increasing according to the contracted volume. This fact makes thinking about the possibility whereby several firms, or sections of a same company, contract jointly these services in order to take advantage of the economies of scale that arise. The problem comes up when the total cost must be shared, in a rational way, among companies or sections. Usually, the discounts are increasing by intervals of quantities which makes the approach of a methodology difficult, because in general any sharing system is based on a continous function. So infinitesimal calculus is used. This paper aims to present a method which allows to share the costs in a reasonable way, even solving situations in which the function of costs is discontinuous with a finite number of jumps.

KEY WORDS

Sharing; Function of costs; Continuity; Economies of scale.

1. INTRODUCCIÓN

Los objetivos de la Contabilidad de Costes han ido evolucionando a lo largo del tiempo, a medida que avanzaba la investigación, hasta llegar al período actual en el que, tras un proceso acumulativo, se consideran dos grandes objetivos: la planificación y control y la valoración de bienes y servicios [Sáez, Fernández y Gutiérrez, 1993].

En todas las organizaciones y en casi todas las facetas de la contabilidad, la asignación del coste es un problema inevitable: ¿cómo se deben asignar a los departamentos los costes de los servicios compartidos? Con frecuencia las respuestas no son correctas o incorrectas con toda claridad [Horngren, Foster y Datar, 1994].

Por otro lado, se puede situar la problemática de la asignación de costes compartidos en algunas de las fases de la evolución del pensamiento contable. A saber:

- *Verdad absoluta*. Esta fase, imperante hasta los años sesenta, se caracterizó por buscar un coste único y verdadero. Los objetivos para la contabilidad de costes, desde este punto de vista fueron los de valorar inventarios y calcular resultados.
- *Verdad condicionada*. Desde esta perspectiva se tiene en cuenta la identificación de distintos costes según la finalidad perseguida. De este modo, la contabilidad de costes se centraba en la búsqueda del coste relevante para la toma de decisiones. Esta fase se desarrolló durante los años sesenta.
- *Verdad costosa*. Tiene en cuenta el coste de la información y la incertidumbre. En consecuencia, la información se considera como una mercancía. Este enfoque se desarrolló durante los años setenta y fue útil para diseñar los sistemas de información de gestión útiles para la toma de decisiones.

Este trabajo se centra en la fase de la *verdad absoluta*, puesto que, a pesar de que esta perspectiva fue superada hace tiempo, se podría considerar que ha recobrado actualidad, debido a que cada vez más empresas están compartiendo servicios y, por tanto, necesitan un mecanismo de este tipo para el reparto de tales costes. Desde este punto de vista, el trabajo presentado podría enmarcarse dentro lo que Mallo [1988] denomina el *programa de cálculo de costes y valoración*, o dentro de *las recientes aportaciones de asignación de costes conjuntos*, utilizando un criterio de reparto similar al empleado en los métodos basados en la teoría de juegos «que, si bien no llega a resolver la problemática relacionada con la asignación de costes conjuntos en su totalidad, proporciona repartos justos y equitativos, conjugando esta cualidad con un notable criterio de racionalidad» [Sáez, Fernández y Gutiérrez, 1993: p. 276].

Existen operaciones comerciales, transacciones o contratos entre empresas en las que el precio unitario del producto o servicio ofertado es función decreciente del número de unidades contratadas. Por ejemplo, cuando una empresa contrata el uso de un vehículo mediante una operación de renting, el precio por hora para un uso contratado de 5 horas diarias es mayor que dicho precio para un uso estipulado de 8 horas diarias. Asimismo, este es el caso de los rappels sobre ventas que en la actualidad se han extendido a la práctica totalidad de las relaciones comerciales entre empresas. En este sentido, un pedido de material fungible para una empresa tendría un precio unitario que va disminuyendo a medida que aumenta el volumen del suministro. En las mismas circunstancias se encontraría el servicio de limpieza contratado por una empresa, la asistencia técnica suministrada por un proveedor de informática o el volumen de materias primas o mercaderías atendido por un proveedor.

Un planteamiento dual es el que se presenta en las cuentas corrientes remuneradas por tramos, en las que la remuneración por unidad de cuantía es función creciente del capital impuesto en dicha operación financiera [Cruz y Valls, 1999a: pp. 129-140, y 1999b: pp. 317-335].

Pues bien, volviendo al planteamiento inicial de reducción de costes unitarios en función del volumen contratado, se puede pensar en la posibilidad de que distintas empresas, o diferentes secciones de una misma empresa, contraten conjuntamente sus servicios o pedidos a un mismo proveedor, con lo que se aprovecharán de una reducción de los costes y obtendrán, por tanto, un mayor beneficio empresarial.

Ahora bien, el problema que se presenta es cómo repartir la reducción habida en el coste total de la operación entre todas las empresas o secciones que se han sindicado en orden a obtener dicha ventaja. En este sentido, el criterio de asignación elegido ha de ser razonable para que, entre otras consideraciones, la empresa que necesita mayor volumen de contratación (y que, por tanto, consigue mayor parte de la reducción) se vea favorecida por la distribución de dichas rebajas en el precio.

Así, en la actualidad todas las empresas eléctricas del país (como Endesa) ofrecen ventajas en la contratación conjunta de este servicio para hacer frente al poder de negociación de «grandes clientes» con diferentes sucursales (caso de los bancos), sedes (caso de las entidades públicas) o centros de actividad.

Recordemos que en los últimos años se ha intentado acometer la resolución del problema de asignación de costes comunes desde dos ópticas diferentes:

- Mediante la teoría marginalista. Algunos de sus más destacados tratadistas son los profesores Jensen y Weil [1954].

- Mediante la teoría de Juegos. Como aportación principal citemos la de Shapley y Shubik.

En un principio, podría pensarse que el reparto proporcional es el más equitativo pero, como se pondrá de manifiesto en el trabajo, ello no es así [Valls, 1999: pp. 267-305] y se tendrá que recurrir a las ecuaciones en diferencias finitas y su resolución mediante ecuaciones diferenciales ordinarias [Goldberg, 1964: pp. 155-159].

Esta metodología requiere que las funciones utilizadas en el estudio sean al menos continuas y es aquí donde aparece el primer problema a resolver. Para ello, en la Sección 2 de este trabajo se expone el planteamiento formal del problema presentado, poniéndose, además, de manifiesto (mediante un ejemplo) que el reparto proporcional no es razonable. Seguidamente, en las Secciones 3 y 4, se resuelve el problema de la asignación de costes entre las empresas participantes haciendo uso del cálculo diferencial y, por último, en la Sección 5, se aborda el problema que se plantea con la discontinuidad de salto propia de las funciones utilizadas. Se finaliza el trabajo exponiendo, en la Sección 6, las conclusiones más relevantes alcanzadas en el mismo.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

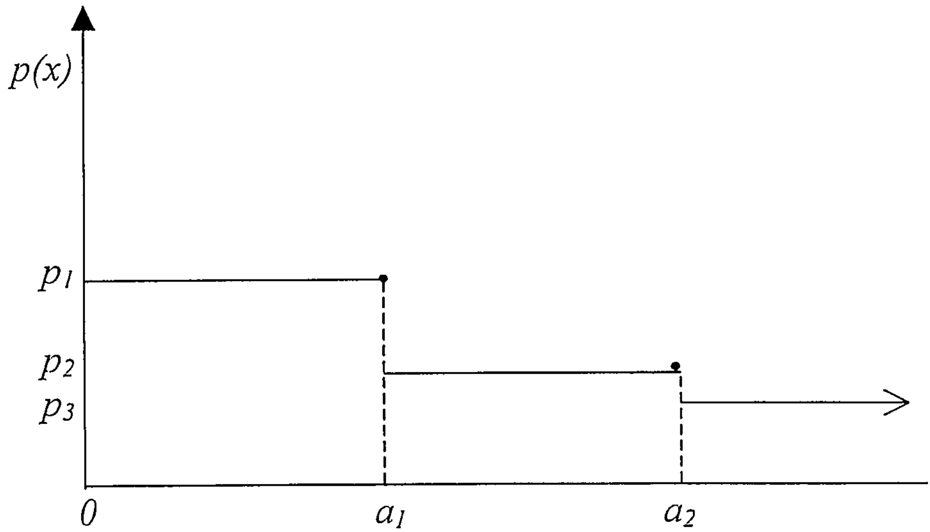
En esta Sección se estudia un modelo para asignar costes compartidos por las distintas secciones de una empresa y, en consecuencia, se estudia el ahorro que se debe derivar de la contratación conjunta de un material o servicio. Considérese una empresa cuyo funcionamiento requiere la contratación o pedido de x unidades de un servicio o producto, respectivamente. Habitualmente, si p es el precio unitario de dicho producto o servicio, se verifica que p es una función de x:

$$p = p(x),$$

que, además, es decreciente:

$$x_1 < x_2 \text{ implica } p(x_1) \geq p(x_2).$$

FIGURA 1



En principio, este decrecimiento es monótono, ya que la función $p(x)$ de precios unitarios es constante por intervalos y discontinua a saltos, presentando la forma de una función escalonada con «tramos» decrecientes:

$$p(x)\begin{cases} p_1, \text{ si } 0 < x \leq a_1 \\ p_2, \text{ si } a_1 < x \leq a_2 \\ \quad \ldots \\ p_n, \text{ si } a_{n-1} < x \end{cases}$$

donde:

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_n.$$

La figura 1 muestra el precio unitario de x unidades contratadas, en el supuesto de que la empresa proveedora o concesionaria del servicio discrimine sus precios en función de tres tramos de pedidos. No obstante, a pesar de que la figura 1 es un ejemplo, es conveniente hacer sobre ella las siguientes consideraciones:

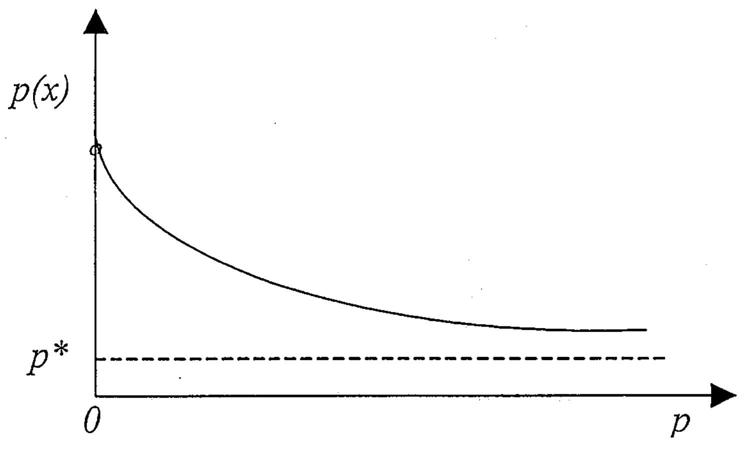
1. Deliberadamente se han dibujado los tramos horizontales con distancias entre ellos, medidas en el eje de ordenadas, cada vez menores, debido a que el estudio se va a desarrollar suponiendo que

el ahorro de costes que se produce al pasar de un tramo a otro es cada vez menor (1), es decir:

$$p_1 - p_2 \geq p_2 - p_3 \geq \ldots \geq p_{n-1} - p_n.$$

2. Existe un coste unitario por debajo del cual la empresa proveedora o suministradora no está dispuesta a estar. En este planteamiento general dicho papel es jugado por p_n. Esto hace pensar que si la curva $p = p(x)$ fuese continua existiría un precio p^* que sería una cota inferior de la misma (véase figura 2), lo que, unido a su carácter decreciente, permite deducir que la recta $p = p^*$ es una asíntota horizontal (no obstante, sobre esta cuestión se volverá en la Sección 4):

FIGURA 2



En consecuencia, dos consumidores tendrán un coste menor si contratan conjuntamente que si cada uno de ellos lo hace de forma individualizada, esto es, si:

$$G(x) = x \cdot p(x)$$

(1) Esta suposición es razonable si se tiene en cuenta que las curvas de demanda son decrecientes y convexas desde el origen respecto del precio, es decir, a mayor cantidad o servicio demandado, no sólo el precio es menor sino que su decrecimiento es decreciente. En este trabajo se propone una función de demanda con número finito de discontinuidades y tramos constantes.

es la función de coste, se verifica que:

$$G(x_1) + G(x_2) \geq G(x_1+x_2).$$

El problema que se plantea en este caso es determinar qué ahorro de costes corresponde a cada consumidor, o lo que es igual, cómo repartir el coste total.

En un principio, podría pensarse en un reparto proporcional en función del consumo realizado por cada sujeto, siendo los porcentajes correspondientes:

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} \text{ y } \frac{x_2}{x_1 + x_2},$$

aplicables para el consumidor de volumen x_1 y x_2, respectivamente.

Ahora bien, este reparto no sería razonable, puesto que aquél que realiza un gasto mayor está contribuyendo no de forma proporcional, sino menos que proporcional al ahorro en costes.

Ejemplo 1: Dada la función de gasto:

$$G(x) = ax^b, \text{ con } a = 1.600 \text{ y } b = 0{,}9,$$

si una empresa consume el volumen $x_1 = 10$ tendrá un gasto de 12.709 unidades monetarias. Si un segundo agente consume el volumen $x_2 = 20$ sufrirá un gasto de 23.716 unidades monetarias.

Se observa cómo el consumo de una cuantía doble da como resultado la generación de un coste menor al doble del obtenido cuando el consumo es inferior. Por este motivo, el que realiza un consumo mayor está contribuyendo de forma menos que proporcional a la obtención de un ahorro en costes.

Inmediatamente puede surgir la idea de hacer el reparto en función del gasto que cada consumidor tendría de forma autónoma, con lo cual se estaría salvando el inconveniente anterior, siendo los porcentajes que darían los costes a asignar:

$$\frac{G(x_2)}{G(x_1) + G(x_2)} \text{ y } \frac{G(x_2)}{G(x_1) + G(x_2)},$$

para cada uno de los consumidores.

Ahora bien, esta solución tiene también un inconveniente y es que a medida que un consumidor se asocia con otro que consume volúmenes cada vez mayores el ahorro adicional que obtiene el primero va disminuyendo (véase ejemplo 2). Por tanto, esta solución tampoco es lógica desde un punto de vista racional, puesto que muestra como más interesante la asociación con consumidores de pequeños volúmenes que la asociación con consumidores mayores.

Ejemplo 2: Sea la función de gasto anteriormente utilizada:

$$G(x) = ax^b,$$

con a = 1.600 y b = 0,9. Ver tabla 1.

TABLA 1

	Situación 1	*Situación 2*	*Situación 3*
x_1	10	10	10
x_2	10	20	30
$G(x_1)$	12.709	12.709	12.709
$G(x_2)$	12.709	23.716	34.161
$G(x_1 + x_2)$	23.716	34.161	44.256
Ahorro en costes	1.702	2.264	2.614
% reparto para x_1	50 %	34,89 %	27,12 %
% reparto para x_2	50 %	65,11 %	72,88 %
Reparto para x_1	851	790	709
Reparto para x_2	851	1.474	1.905
Total correspondiente:			
— para x_1	11.858	11.919	12.000
— para x_2	11.858	22.242	32.256

El objetivo que se persigue es el reparto del coste total, para lo cual es útil razonar en términos de ahorro de costes respecto a la adquisición individual. La solución debe, por tanto, proporcionar al consumidor menor un ahorro en costes cada vez mayor, a medida que se asocie con un consumidor de mayor volumen. Además, dicha cantidad debe suponer un porcentaje cada vez menor del ahorro total a repartir.

Por otro lado, el consumidor de mayor volumen debe obtener un ahorro en costes creciente en función de la cantidad consumida, lo que supondrá, a su vez, una proporción creciente sobre el ahorro total a distribuir.

3. SOLUCIÓN APORTADA PARA EL CASO DE DOS CONSUMIDORES (CENTROS)

Antes de entrar en el contenido de esta sección, es conveniente citar a Thomas [1969] y su tesis de la arbitrariedad de los costes conjuntos, según la cual el coste conjunto es indivisible tanto en el tiempo como en el espacio, por lo que su asignación debe estar basada en criterios subjetivos, incapaces de resolver de manera absoluta el problema. No obstante, el método que se propone aquí, aunque está sujeto a cierto grado de arbitrariedad, se resolverá tomando referencias objetivas, a saber, la comparación entre los costes individuales y los costes compartidos.

Para ello, el método de los costes alternativos [Sáez y Gutiérrez, 1987: pp. 444-445] puede ser aplicado en este caso, ya que la solución que se propone se deriva de la atribución del ahorro de costes a los distintos productos en proporción a la mejor alternativa que se ha abandonado. En este caso, los productos hacen referencia a las diferentes secciones de una empresa.

Una forma de reparto que se ajusta a las consideraciones establecidas en el epígrafe anterior y que, por tanto, puede estimarse como racional es la que se expone a continuación. Supónganse dos empresas, o secciones de una misma empresa, A y B, que consumen, respectivamente, los volúmenes x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$.

Para establecer el reparto del ahorro de costes se parte de la situación en la que ambos sujetos consumen el mismo volumen, que será de cuantía igual al menor, es decir, x_1. En tal caso, el ahorro de costes obtenido en la operación conjunta corresponderá por partes iguales a A y a B.

Seguidamente, supóngase que B consume x_1 más una cantidad adicional d. Ahora, ambos consumidores deberán obtener, al menos, el mismo ahorro de costes que cuando aportaban igual cuantía. Por tanto, la cantidad que tendría que repartirse es sólo la diferencia entre el ahorro obtenido en ambas situaciones (consumo por parte de ambos de x_1 y consumo de x_1 por parte de A y de $x_1 + d$ por parte de B).

Tal reparto se va a realizar en función del gasto que tendría cada uno de forma individualizada en este segundo caso, con lo cual se asignaría un porcentaje menos que proporcional al que aporta un mayor volumen de consumo a la contratación conjunta. Además, dicha proporción será creciente a medida que la cantidad consumida por el segundo sea mayor.

Esta operación se repite de forma recurrente hasta que la cantidad consumida por B, $x_1 + n.d$, sea igual x_2. De esta forma, al finalizar el proceso, se establece la cuantía que corresponde a cada consumidor. Véase el ejemplo 3 que ilustra el proceso expuesto.

Ejemplo 3: Calcular qué parte del ahorro de costes corresponde a cada uno de los dos consumidores de una contratación conjunta, siendo los volúmenes consumidos de 10 y 30 unidades, respectivamente, si la función de gasto establecida es la anterior:

$$G(x) = ax^b,$$

con $a = 1.600$ y $b = 0,9$. Ver tabla 2.

TABLA 2

	Situación 1	*Situación 2*	*Situación 3*
x_1 x_2	10 10	10 20	10 30
$G(x_1)$ $G(x_2)$	12.709 12.709	12.709 23.716	12.709 34.161
$G(x_1 + x_2)$	23.716	34.161	44.256
Ahorro en costes	1.702	2.264	2.614
Reparto para x_1: — anterior — nuevo — total	 0 0,5 (1.702 – 0) 851	 851 0,3489 (2.264 – 1.702) 1.047	 1.047 0,2712 (2.614 – 2.264) 1.142
Reparto para x_2: — anterior — nuevo — total	 0 0,5 (1.702 – 0) 851	 851 0,6511 (2.264 – 1.702) 1.217	 1.217 0,7288 (2.614 – 2.264) 1.472
% reparto para x_1 % reparto para x_2	851/1.702 = 50% 851/1.702 = 50%	1.047/2.264 = 46,25% 1.217/2.264 = 53,75%	1.142/2.614 = 43,69% 1.472/2.614 = 56,31%
Total a pagar: — por x_1 — por x_2	 11.858 11.858	 11.662 22.499	 11.567 32.689

En el ejemplo anterior el incremento d elegido ha sido de 10 unidades monetarias, pero, análogamente, podría haberse considerado cualquier otra cantidad. Ahora bien, es necesario observar que, a medida que la cantidad incremental es más pequeña, el resultado obtenido se aproxima más a lo que se estima como correcto, según el planteamiento realizado. En consecuencia, los incrementos deberían ser infinitesimales, por lo que, para expresar la solución correcta, ha de recurrirse al cálculo diferencial.

Así pues, supónganse dos volúmenes de consumo x_1 y x_2 con la condición $x_1 < x_2$. La variable elegida para representar el incremento es x, que recorrerá el intervalo $[0, x_2 - x_1]$. Sea h el cociente:

$$h = \frac{x_2 - x_1}{n}.$$

Se define $y(k)$ como el gasto que le corresponde asumir al consumidor de x_1 cuando el otro consumidor consume, además de x_1, la cantidad:

$$kh = k\frac{x_2 - x_1}{n}, \quad \text{siendo } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En tal caso, teniendo en cuenta el procedimiento expuesto anteriormente, se verificará que:

$$y(k + 1) = y(k) - = \frac{A - B}{G(x_1) + G(x_1 + kh + h)} G(x_1), \qquad [1]$$

siendo:

$$A = G(x_1) + G(x_1 + kh + h) - G(x_1 + x_1 + kh + h)$$

y:

$$B = G(x_1) + G(x_1 + kh) - G(x_1 + x_1 + kh),$$

donde:

- $y(k + 1)$ representa el gasto que le corresponde asumir al consumidor de x_1 cuando el otro consumidor consume, además de x_1, la cantidad $(k + 1)h$.
- A representa el ahorro en costes obtenido al contratar de forma conjunta el consumidor de volumen x_1 y el consumidor de volumen $x_1 + kh + h$.
- B representa el ahorro en costes obtenido al contratar de forma conjunta el consumidor de volumen x_1 y el consumidor de volumen $x_1 + kh$.
- A - B muestra la diferencia del ahorro en costes obtenido en la contratación conjunta entre las situaciones representadas por A y B.
- $\dfrac{A - B}{G(x_1) + G(x_1 + kh + h)} G(x_1)$ representa la diferencia del ahorro en

costes obtenido en la contratación conjunta que corresponde al consumidor de x_1, utilizando como criterio de reparto el gasto que cada consumidor tendría de forma individualizada.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad [1] por h, simplificando $G(x_1)$ y reordenando los sumandos de A y de B, quedaría:

$$\frac{y(k+1) = y(k)}{h} = -\frac{C-D}{G(x_1)+G(x_1+kh+h)}\,G(x_1),$$

siendo:

$$C = \frac{G(x_1+kh+h)-G(x_1+kh)}{h}$$

y:

$$D = \frac{G(2x_1+kh+h)-G(2x_1+kh)}{h}$$

A continuación, tomando el límite cuando h tiende a cero (con lo cual, consideramos el incremento infinitesimal), se tiene:

$$y'(x) = -\frac{G'(x_1+x)-G'(2x_1+x)}{G(x_1)+G(x_1+x)}\,G(x_1)$$

siendo $kh = x$.

Seguidamente, se integran los dos miembros de la igualdad entre 0 y $x_2 - x_1$:

$$y(x_2-x_1)-y(0) = \int_0^{x_2-x_1} -\frac{G'(x_1+x)-G'(2x_1+x)}{G(x_1)+G(x_1+x)}\,G(x_1)dx.$$

Por último, teniendo en cuenta que:

$$y(0) = \frac{G(2x_1)}{2}$$

se obtiene la expresión que determina el gasto total que corresponde asignar al consumidor de menor volumen en la operación conjunta:

$$y(x_2-x_1) = \frac{G(2x_1)}{2} - \int_0^{x_2-x_1} \frac{G'(x_1+x)-G'(2x_1+x)}{G(x_1)+G(x_1+x)}\,G(x_1)dx.$$

Así, la cantidad correspondiente al consumidor mayor se obtendrá por diferencia entre el total e $y(x_2 - x_1)$, es decir:

$$G(x_1 + x_2) - y(x_2 - x_1),$$

o bien, resolviendo la expresión:

$$\frac{G(2x_1)}{2} + G(x_2) - G(x_1) -$$

$$\int_0^{x_2-x_1} \frac{G'(x_1 + x) - G'(2x_1 + x)}{G(x_1) + G(x_1 + x)} G(x_1 + x)dx.$$

Se puede comprobar cómo, en efecto, la suma de los gastos a asignar a cada inversor es igual al gasto obtenido conjuntamente. Es decir:

$$\frac{G(2x_1)}{2} - \int_0^{x_2-x_1} \frac{G'(x_1 + x) - G'(2x_1 + x)}{G(x_1) + G(x_1 + x)} G(x_1)dx +$$

$$\frac{G(2x_1)}{2} + G(x_2) - G(x_1) -$$

$$- \int_0^{x_2-x_1} \frac{G'(x_1 + x) - G'(2x_1 + x)}{G(x_1) + G(x_1 + x)} G(x_1 + x)dx =$$

$$= G(2x_1) + G(x_2) - G(x_1) - \int_0^{x_2-x_1} [G'(x_1 + x) - G'(2x_1 + x)dx =$$

$$= G(2x_1) + G(x_2) - G(x_1) - [G(x_1 + x) - G(2x_1 + x)]_0^{x_2-x_1} =$$

$$= G(x_1 + x_2).$$

Ejemplo 4: Consideremos la función de gasto del ejemplo anterior:

$$G(x) = ax^b,$$

con $a = 1.600$ y $b = 0,9$. Es decir, $G(x) = 1.600x^{0,9}$ y $G'(x) = 1.440x^{-0,1}$.

En tal caso, la expresión del montante a percibir por el inversor de menor cuantía es:

$$y(x_2 - x_1) = 800(2x_1)^{0,9} -$$

$$- \int_0^{x_2-x_1} \frac{1.440\ (x_1 + x)^{-0,1} - 1.440\ (2x_1 + x)^{-0,1}}{1.600x_1^{0,9} + 1.600(x_1 + x)^{0,9}} 1.600x_1^{0,9}\ dx.$$

La distribución final, según la solución propuesta, que resulta de aplicar el proceso anterior se muestra en la tabla 3.

TABLA 3

	Situación 1	*Situación 2*	*Situación 3*
x_1	10	10	10
x_2	10	20	30
$G(x_1)$	12.709	12.709	12.709
$G(x_2)$	12.709	23.716	34.161
$G(x_1 + x_2)$	23.716	34.161	44.256
Ahorro en costes	1.702	2.264	2.614
Total a pagar:			
— por x_1	11.858	11.621	11.513
— por x_2	11.858	22.540	32.743

La solución que se propone es aparentemente compleja, en la medida en la que implica cálculo diferencial, sobre todo, cuando el número de consumidores (centros) es más de dos (ver Sección 4). Por este motivo, se propone una solución aproximada, pero más operativa, que la expuesta con anterioridad. Ésta consiste en emplear como coeficientes de proporcionalidad los gastos totales $G(x_1)$ y $G(x_2)$ de cada consumidor, con lo cual, la cuantía que corresponde asignar al consumidor de menor volumen en la operación conjunta viene dado por:

$$y(x_2 - x_1) = \frac{G(2x_1)}{2} = -\frac{G(x_1)}{G(x_1) + G(x_2)}[G(2x_1) + G(x_2) - G(x_1) - G(x_1) + G(x_2)].$$

Aplicada al ejemplo 4 se obtendrían los siguientes resultados:

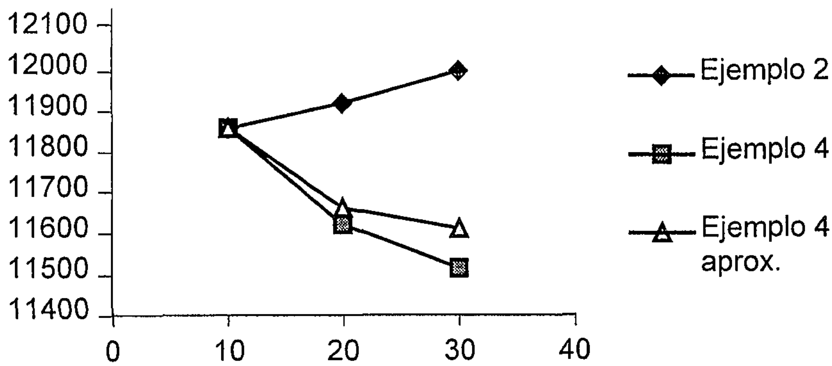
TABLA 4

Total a pagar:			
— por x_1	11.858	11.662	11.611
— por x_2	11.858	22.499	32.645

Se observa cómo esta solución es una buena aproximación de la anterior, con la ventaja de que no requiere el empleo del cálculo diferencial, por lo que su utilización práctica es sencilla, pudiendo resolverse para diversas situaciones a través de cualquier hoja de cálculo.

La gráfica de la figura 3 resume las soluciones obtenidas para el consumidor de menor volumen (x_1) en función de las cantidades consumidas por el otro (x_2) y para cada una de las soluciones contenidas en los ejemplos 2 y 4.

FIGURA 3



4. GENERALIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN PARA n CONSUMIDORES (CENTROS)

Si hubiese más de dos consumidores, en general n, la forma de realizar el reparto de costes compartidos podría ser establecida análogamente a la expuesta para el caso de dos empresas.

Supónganse, por ejemplo, tres empresas A, B y C que consumen los volúmenes x_1, x_2 y x_3, respectivamente, siendo:

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Para determinar el gasto correspondiente a cada una de ellas, es preciso seguir tres pasos o etapas:

- En primer lugar, suponer que todos los agentes consumen el menor de los volúmenes, esto es, x_1. En este caso, deberán participar de forma equitativa en el reparto del gasto conjunto, correspondiendo a cada uno de ellos:

$$\frac{G(3x_1)}{3}.$$

- A continuación, suponer que el agente A consume x_1 y que los agentes B y C consumen ambos x_2. En tal caso, se considera la variable x que recorre el intervalo $[0, x_2 - x_1]$ y llamamos h al cociente:

$$h = \frac{x_2 - x_1}{n}.$$

Represéntese por $y^{x_1}(k)$el gasto correspondiente al agente A cuando los otros dos (B y C) consumen, además de x_1, el volumen kh, donde $k = 1, 2, \ldots, n$. Así pues, siguiendo el mismo razonamiento expuesto en la Sección 3, se tiene:

$$y^{x_1}(k+1) = y^{x_1}(k) - \frac{A - B}{G(x_1) + 2G(x_1 + kh + h)} G(x_1),$$

siendo:

$$A = G(x_1) + 2G(x_1 + kh + h) - G(x_1) + G(x_1 + 2(x_1 + kh + h))$$

y:

$$B = G(x_1) + 2G(x_1 + kh)) - G(x_1 + 2(x_1 + kh)).$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por h y procediendo igual que antes:

$$\frac{y^{x_1}(k+1) - y^{x_1}(k)}{h} = -\frac{C - D}{G(x_1) + 2G(x_1 + kh + h)} G(x_1),$$

siendo:

$$C = 2\,\frac{G(x_1 + kh + 2h) - G(x_1 + kh)}{h}$$

y:

$$D = \frac{G(3x_1 + 2kh + 2h) - G(3x_1 + 2kh)}{h}$$

Tomando el límite cuando h tiende a cero y llamando $x = kh$, quedaría:

$$(y^{x_1})'(x) = -\frac{2G'(x_1 + x) + F'(3x_1 + 2x)}{G(x_1) + 2G(x_1 + x)} G(x_1),$$

siendo $y^{x_1}(x)$ el gasto correspondiente al agente A cuando los otros agentes consumen el volumen $x_1 + x$.

Finalmente, integrando la igualdad anterior entre los límites 0 y $x_2 - x_1$ y teniendo en cuenta que:

$$y^{x_1}(0) = \frac{G(3x_1)}{3}.$$

se obtiene el gasto a asignar, del gasto total conjunto, al consumidor A como:

$$y^{x_1}(x_2 - x_1) = \frac{G(3x_1)}{3} -$$

$$- \int_0^{x_2-x_1} \frac{2G'(x_1 + x) - G'(3x_1 + 2x)}{G(x_1) + 2G(x_1 + x)} G(x_1)dx.$$

La cantidad correspondiente a cada uno de los consumidores B y C sería:

$$\frac{G(x_1 + 2x_2) - y^{x_1}(x_2 + x_1)}{2}.$$

• Por último, suponer que A consume x_1, B consume x_2 y C el volumen x_3. Se define ahora la variable x que recorre el intervalo $[0, x_3 - x_2]$, siendo, por tanto:

$$h = \frac{x_3 - x_2}{n}.$$

Sea $y^{x_1, x_2}(k)$ el gasto correspondiente al agente A cuando A consume x_1, B consume x_2 y C, además de x_2, el volumen kh, pudiendo variar h desde 1 hasta n. En consecuencia:

$$y^{x_1, x_2}(k + 1) = y^{x_1, x_2}(k) - \frac{A - B}{G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + kh + h)} G(x_1),$$

siendo:

$$A = G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + kh + h) - G(x_1 + x_2 + kh + h)$$

y:

$$B = G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + kh) - G(x_1 + x_2 + x_2 + kh)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por h y reagrupando los sumandos convenientemente:

$$\frac{y^{x_1, x_2}(k + 1) - y^{x_1, x_2}(k)}{h} = -\frac{C - D}{G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + kh + h)} G(x_1),$$

siendo:

$$C = \frac{G(x_2 + kh + h) - G(x_2 + kh)}{h}$$

y:

$$D = \frac{G(x_1 + 2x_2 + kh + h) - G(x_1 + 2x_2 + kh)}{h}$$

Tomando el límite cuando h tiende a 0 y llamando x al producto kh:

$$(y^{x_1, x_2})'(x) = -\frac{G'(x_2 + x) + G'(x_1 + 2x_2 + x)}{G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + x)}\, G(x_1),$$

siendo $y^{x_1, x_2}(x)$el gasto correspondiente al agente A cuando él mismo consume x_1, el agente B consume x_2 y el agente C consume el volumen $x_2 + x$.

Por último, integrando la igualdad anterior entre los límites 0 y $x_3 - x_2$, y teniendo en cuenta que:

$$y^{x_1, x_2}(0) = -\,y^{x_1}(x_2 - x_1),$$

se obtiene la expresión que nos determina la cantidad del gasto, conseguido en la inversión conjunta, que corresponde al agente A que consume el volumen menor x_1:

$$y^{x_1, x_2}(x_3 - x_2) = y^{x_1}(x_2 - x_1) -$$

$$- \int_0^{x_3 - x_2} \frac{G'(x_2 + x) - G'(x_1 + 2x_2 + x)}{G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + x)}\, G(x_1)dx.$$

Al agente B, que consume el volumen x_2 le corresponde:

$$\frac{G(x_1 + 2x_2) - y^{x_1}(x_2 + x_1)}{2} -$$

$$- \int_0^{x_3 - x_2} \frac{G'(x_2 + x) - G'(x_1 + 2x_2 + x)}{G(x_1) + G(x_2) + G(x_2 + x)}\, G(x_2)dx.$$

Finalmente, al agente C, que consume el mayor volumen x_3, le corresponderá el resto, es decir, la diferencia entre el gasto conjunto $G(x_1 + x_2 + x_3)$ y las cantidades asignadas, anteriormente, a los otros dos consumidores.

Análogamente, el proceso expuesto puede ser generalizado considerando n agentes que consumen los volúmenes x_1, x_2, ..., x_n. Para determinar, por ejemplo, el gasto a asignar al consumidor de x_1 se tendrían que realizar n pasos sucesivos:

1.° Considerar que los n agentes consumen el volumen x_1, en cuyo caso a todos les correspondería igual cantidad:

$$\frac{G(nx_1)}{n}.$$

2.° Suponer que el primer agente consume x_1 y el resto x_2, el gasto correspondiente a ese primer consumidor sería:

$$y^{x_1}(x_2 - x_1) = \frac{G(nx_1)}{n} -$$

$$- \int_0^{x_2-x_1} \frac{(n-1)G'(x_1+x) - G'(nx_1+(n-1)x)}{G(x_1)+(n-1)G(x_1+x)} G(x_1)dx.$$

3.° A continuación suponer que el primer agente consume x_1, el segundo agente x_2 y los restantes $n-2$ consumen x_3. En tal caso, el gasto que se le asignaría al primero de ellos vendría dado por:

$$y^{x_1,x_2}(x_3 - x_2) = y^{x_1}(x_2 - x_1) -$$

$$- \int_0^{x_3-x_2} \frac{(n-2)G'(x_2+x) - G'(x_1+(n-1)x_2+(n-2)x)}{G(x_1)+G(x_2)+(n-2)G(x_2+x)} G(x_1)dx.$$

De este modo, se iría cada vez aumentando el volumen mayor a consumir, hasta llegar a la situación propuesta. En general, el paso m-ésimo sería:

m.°) Considerar que el primer agente consume x_1, el segundo x_2, el tercero x_3, ..., el $(m-1)$-ésimo x_{m-1} y los $n-(m-1)$ consumidores restantes el volumen x_m, el gasto correspondiente al primero se obtendrá resolviendo la siguiente expresión:

$$y^{x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},}(x_m - x_{m-1}) = y^{x_1,x_2,\ldots,x_{m-2},}(x_{m-1} - x_{m-2}) -$$

$$- \int_0^{x_m-x_{m-1}} \frac{A-B}{\sum_{i=1}^{m-1} G(x_i) + (n-(m-1))g(x_{m-1}-x)} G(x_1)dx,$$

siendo:

$$A = (n-(m-1))G'(x_{m-1}+x)$$

y:

$$B = G'\left(\sum_{i=1}^{m-2} x_i + (n-(m-2))x_{m-1} + (n-(m-1)x)\right).$$

Análogamente, puede obtenerse el gasto que correspondería asignar a cada uno de los restantes consumidores, tal y como quedó expuesto con anterioridad.

5. OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE COSTE

El modelo propuesto en las Secciones 3 y 4 para asignar costes requiere que la función de gasto sea continua y derivable en todo su dominio. La realidad, sin embargo, evidencia que la mayoría de los gastos en los que incurre una empresa vienen determinados por funciones que no cumplen las características anteriores, como las funciones por tramos del tipo:

$$g(x)\begin{cases} p_1x, \text{ si } 0 < x \leq a_1 \\ p_2x, \text{ si } a_1 < x \leq a_2 \\ \quad\ldots \\ p_nx, \text{ si } a_{n-1} < x \end{cases}$$

donde x es el volumen de producto o servicio contratado y p_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$ el precio unitario, siendo:

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_n,$$

tal y como se puso de manifiesto en la Sección 2.

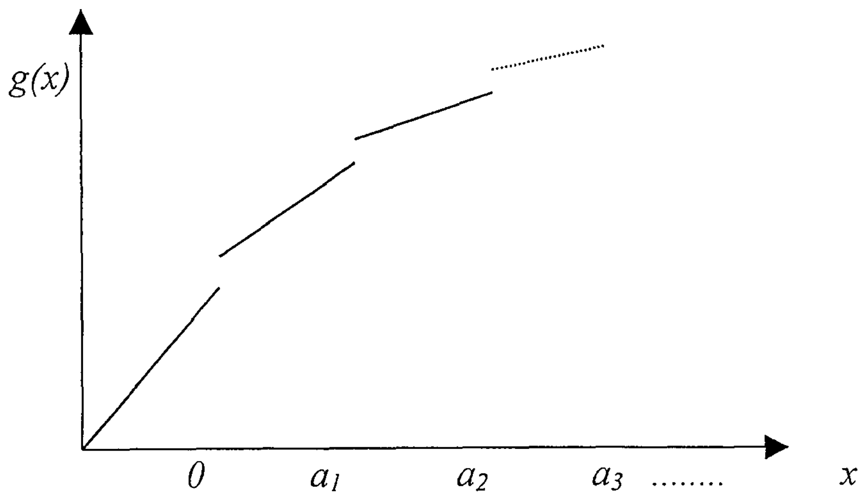
En tales casos puede obtenerse una función aproximada de gasto $G(x)$, derivable para todo valor de x, mediante un ajuste por regresión.

Así pues, representando gráficamente la función $g(x)$ (véase figura 4), se observa cómo la función aproximada $G(x)$ será del tipo:

$$G(x) = ax^b,$$

siendo a y b constantes, con $b < 1$ (dada la convexidad desde el origen). La regresión se ha efectuado a partir de los límites inferiores de cada intervalo de la función $g(x)$, debido a que en el último intervalo no existe extremo superior. No obstante, podría elegirse otra alternativa igualmente válida.

FIGURA 4



Ejemplo 5: Dada la función que determina el coste de limpieza de una determinada empresa:

$$g(x) = \begin{cases} 1.500x, \text{ si } 0 < x \leq 20 \\ 1.350x, \text{ si } 20 < x \leq 50 \\ 1.200x, \text{ si } 50 < x \leq 75 \\ 1.100x, \text{ si } 75 < x \leq 90 \\ 1.000x, \text{ si } 90 < x \leq 100 \\ 950x, \text{ si } 100 < x \leq 130 \\ 900x, \text{ si } 130 < x \end{cases}$$

y, a partir de los siguientes valores de x:

x	$g(x)$
1	1.500
21	28.350
51	61.200
76	83.600
91	91.000
101	95.950
131	117.900

realizando el ajuste de regresión se obtiene la función exponencial derivable:

$$g(x) = 1.600{,}6689x^{0{,}9025455},$$

que permite establecer la asignación de costes conjuntos mediante el modelo propuesto. Podría pensarse que tal aproximación implica una pérdida de exactitud, pero es preciso señalar que dicha pérdida es mínima, sobre todo si tenemos en cuenta que el ajuste puede realizarse de forma más exacta mediante el empleo de otras técnicas más complejas que la desarrollada aquí a título de ejemplo. Nos referimos a la utilización de polinomios ortogonales o aproximaciones uniformes [Davis, 1975, y Kincaid y Cheney, 1994]. En definitiva, y en todo caso, el reparto obtenido será mejor que el ofrecido por la metodología tradicional.

6. CONCLUSIONES

La contratación conjunta por varias empresas o secciones dentro de una misma empresa de determinados consumos da lugar a la obtención de economías de escala. En tales casos surge el problema de cómo llevar a cabo la distribución del coste compartido total entre los diferentes centros de gasto, de forma que el reparto establecido sea racional para todos y cada uno de ellos.

Los diferentes métodos proporcionales usados tradicionalmente carecen, como se ha podido comprobar, de equidad, lo que obliga a buscar otro sistema de asignación. El modelo que se propone en este artículo establece el gasto a asignar a cada consumidor mediante el cálculo diferencial, llevando a cabo el reparto en base a la proporción que el gasto individual supone sobre el conjunto de gastos individuales.

Para ello, es necesario emplear una función de gasto que sea continua, lo que generalmente no ocurre en la práctica. Ahora bien, es posible obtener una aproximación a la misma realizando un ajuste de regresión. Asimismo, señalar que es posible llevar a cabo la distribución del ahorro adicional en costes, obtenido en la contratación conjunta sobre las contrataciones individualizadas, utilizando un criterio diferente al que aquí se ha propuesto (la proporción del gasto autónomo sobre el total de gastos individuales), aunque debería verificar, en todo caso, las consideraciones establecidas en la Sección 2. Ahora bien, es preciso señalar que el modelo que proponemos es lo suficientemente flexible como para asumir cualquier cambio que, en este sentido, se propusiera introducir.

7. BIBLIOGRAFÍA

CRUZ RAMBAUD, S., y VALLS MARTÍNEZ, M. C. [1999a]: «Profit-sharing with non-homogeneous financial laws», *MS'99 International Conference on Modelling and Simulation*, Santiago de Compostela, pp. 129-140.

— [1999b]: «Distribución de los beneficios obtenidos por un conjunto de capitales en una inversión regida por una ley financiera subaditiva», *Revista de Estudios Empresariales*, n.º 7, pp. 317-335.

DAVIS, P. J. [1975]: *Interpolation & Approximation*, Dover Publication, Inc., New York.

GOLDBERG, S. [1964]: *Ecuaciones en diferencias finitas*, Marcombo S.A., Barcelona.

HORNGREN, C.; FOSTER, G., y DATAR, S. [1994]: *Cost Accounting a Managerial Emphasis*, Prentice Hall, New Jersey.

KINCAID, D., y CHENEY, W. [1994]: *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Ed. Addison Wesley Iberoamericana.

MALLO RODRÍGUEZ, C. [1988]: *Contabilidad de Costes y de Gestiónm*, Pirámide, Madrid.

SÁEZ TORRECILLA, A., y GUTIÉRREZ DÍAZ, G. [1987]: *Contabilidad de Costes*, UNED, Madrid.

SÁEZ TORRECILLA, A.; FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, A., y GUTIÉRREZ DÍAZ, G. [1993]: *Contabilidad de costes y contabilidad de gestión* (vol. 1), McGraw-Hill, Madrid.

SHAPLEY, L., y SHUBIK, M. [1954]: «A method for evaluating the distribution of power in a committee system», pp. 425-30, en DIMAND, M. A. [1997]: *The foundations of game theory*, vol. 3, Elgar Reference Collection Cheltenhaam, U. K. an Lyme N. H.

THOMAS, A. L. [1969]: «The allocation problem in financial accounting theory», *Studies in Accounting Research*, n.º 3, pp. 1-122.

VALLS MARTÍNEZ, M. C. [1999]: «Escindibilidad y homogeneidad de las leyes financieras. Consecuencias sobre el fraccionamiento del plazo y la cuantía», Tesis Doctoral, Universidad de Almería.