REVISTA ESPAÑOLA DE FINANCIACION Y CONTABILIDAD
Vol. XXVII, n.º 96
julio-septiembre 1998
pp. 613-637

Daniel Villalba Vilá
Catedrático de Organización de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid

UN MODELO DE SELECCION DE CARTERA CON ESCENARIOS Y FUNCION DE RIESGO ASIMETRICA

Resumen.—Palabras clave.—Abstract.—Key words.—1. Introducción. 2. El modelo de desviaciones medias absolutas (MAD).—3. La construcción de escenarios y su utilización sobre un modelo MAD.—4. El modelo MAD con escenarios y función de riesgo asimétrica.—5. La rentabilidad mínima aceptable.—6. Función de distribución de probabilidad para cada escenario y la rentabilidad mínima garantizada.—7. El modelo MAD con escenarios y función de riesgo asimétrica aplicados a un caso del mercado español. 8. Conclusiones.—Bibliografía.

RESUMEN

El modelo de Markowitz es la base de la mayoría de los modelos de selección de cartera. Sin embargo, su utilización en la práctica es bastante reducida. El motivo de ello tiene que ver con sus dificultades de cálculo, la inestabilidad de las soluciones que proporciona, los problemas para incluir opiniones de los expertos y la rigidez de la función de riesgo considerada. El artículo presenta un modelo de selección de cartera que, sin perder las propiedades del modelo original de Markowitz, pretende reducir algunos de sus defectos. Para ello, parte de un modelo de desviaciones medias absolutas en el que incluye la posibilidad de

Recibido 18-01-97
Aceptado 29-01-98

incorporar diferentes escenarios y funciones de riesgo asimétricas. Finalmente, aplica el modelo a un caso real de la bolsa española.

PALABRAS CLAVE

Optimización de carteras, Modelo de Markowitz, Modelo MAD, Programación lineal, Funciones de riesgo asimétricas.

ABSTRACT

The Markowitz modal is the base of the majority of portfolio selection models. However its practical use has not been very bread. The main reasons have to do with computing problems, instability of the solutions, problems to include opinions from experts and the rigidity of the risk function considerad. The article presents a portfolio selection modal reducing part of the problems of the original Markowitz modal without losing its main characteristic properties. The article starts from a mean absolute deviation modal and it includes the possibility of incorporating different scenarios and asymmetric risk functions. Finally the modal is applied to a real case from the Spanish Stock Market.

KEY WORDS

Portfolio Optimization, Markowitz's Model, MAD Model, Linear Programming, Asymetric risk functions.

1. INTRODUCCION

El origen de la gran mayoría de los modelos de selección de cartera es el modelo de Markowitz dado a conocer en parte en 1952 y de manera más completa en 1959 [Markowitz, 1952 y 1959]. Sin duda, sobre este modelo está fundamentada, además, una buena parte de la teoría sobre finanzas que se explica en todas las facultades de ciencias económicas y empresariales desde hace muchos años.

Es evidente, por tanto, que el modelo de Markowitz es bien conocido, ya no sólo por personas recién salidas de las universidades, sino por aquellas que por sus conocimientos y edad ocupan puestos de responsabilidad en grandes empresas financieras y de inversión.

Sin embargo, y a pesar de la ingente literatura que existe, y que sigue apareciendo sobre el modelo de Markowitz, su utilización entre los profesionales es aún muy escasa. Sobre los problemas de la aplicación real del modelo de Markowitz puede verse, por ejemplo, a Frankfurter y Phillips [1995], Chopra y Ziemba [1993] y Michaud [1989]. Los problemas derivados de esa aplicación real pueden resumirse en los siguientes:

— Dificultades de cálculo. Cualquier problema de selección de cartera con un número importante de activos financieros necesita calcular un número de covarianzas de algo menos del cuadrado del número de activos y resolver un programa cuadrático con un número de términos en la función objetivo superior a $n^2/2$, siendo n el número de activos considerados para optimizar.

— Las soluciones obtenidas por el modelo de Markowitz son extraordinariamente inestables dependiendo, sobre todo, de las previsiones sobre las rentabilidades esperadas. Pequeños cambios en las rentabilidades esperadas generan modificaciones muy importantes en la cartera señalada como óptima.

— No se contempla, por lo menos directamente en el modelo, la opinión de los expertos sobre la situación del mercado en cada momento, salvo para realizar una previsión puntual de las rentabilidades esperadas y de la matriz de varianzas-covarianzas.

— Prácticamente sólo se contempla una forma de tener en cuenta el riesgo como función de la varianza, cuando de hecho, el inversor no suele pensar en estos términos en una gran cantidad de casos.

El modelo que planteamos en este artículo pretende resolver o paliar, por lo menos parcialmente, parte de las dificultades planteadas por el modelo original de selección de cartera de Markowitz.

En el apartado 2 resumimos el modelo de desviaciones medias absolutas [MAD (1)] de Konno y Yamazaki que resuelve los problemas de cálculo del modelo original de Markowitz, siendo la solución obtenida equivalente. No es preciso calcular covarianzas y, además, la resolución es mediante un programa lineal, y no cuadrático.

(1) Mantenemos aquí las siglas inglesas de «Mean-Absolute Deviation».

En el apartado 3 se plantea la inclusión de posibles escenarios en un modelo de tipo MAD. Primero, considerando que todos los escenarios tienen la misma probabilidad de realización y, después, asignando a cada escenario una probabilidad diferente.

Los modelos tradicionales de selección de cartera consideran funciones de riesgo simétricas. El apartado 4 considera funciones de riesgo asimétricas manteniéndose un modelo lineal y la posibilidad de considerar diferentes escenarios con sus probabilidades asociadas.

Los inversores generalmente requieren una rentabilidad para sus inversiones a la que consideran la mínima aceptable. El apartado 5 trata de la modelización de este tipo de situaciones en el contexto general de funciones de riesgo asimétricas tratadas mediante modelos lineales.

El apartado 6 explota la información derivada de los resultados del modelo planteado en anteriores apartados y el 7 expone un caso ejemplo aplicado a la Bolsa española.

Finalmente, en el apartado 8 se aportan las conclusiones.

2. EL MODELO DE DESVIACIONES MEDIAS ABSOLUTAS (MAD)

Este modelo ha sido planteado por Konno y Yamazaki [1991] que lo han aplicado a la Bolsa de Tokio. El modelo minimiza las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de la cartera, sujeta al mismo tipo de restricciones que el modelo clásico de Markowitz. Los autores prueban, a partir de un resultado conocido de Rao [1965], que si las rentabilidades de los activos financieros se comportan como una función de distribución normal multivariante, minimizar la varianza, expresada como una función cuadrática de la matriz de varianzas-covarianzas, es equivalente a minimizar las desviaciones absolutas respecto a la media. Este resultado tiene la enorme ventaja de que el modelo puede ser resuelto entonces mediante programación lineal (P.L.), en lugar de hacerlo mediante programación cuadrática con el consiguiente ahorro en tiempo de cálculo.

El modelo propuesto por Konno y Yamazaki es el siguiente:

$$\min \sum_{t=1}^{T} yt / T$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j + y_t \geq 0 \qquad t = \{1,\ldots,T\} \qquad [1]$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j + y_t \geq 0 \qquad t = \{1,\ldots,T\} \qquad [2]$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho \qquad [3]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad [4]$$

donde:

x_j ... Tanto por uno invertido en el activo financierio j.

$a_{jt} = r_{jt} - r_j$

donde:

r_j ... es la rentabilidad media eperada del activo financiero j:

$$r_j = \sum_{t=1}^{n} r_{jt} / T$$

r_{jt} ... es la tasa de rentabilidad del activo financiero j en el período t $j = \{1,2,\ldots,n\}$, $t = \{1,2,\ldots,T\}$

ρ ... es la tasa de rentabilidad requerida o deseada parametrizable.

Nótese que r_{jt} podrían ser las tasas de rentabilidad observadas históricamente o cualquier otra realización de la variable r_j.

Con este planteamiento, formalmente de P.L., lo que se hace es minimizar la suma de las desviaciones absolutas con respecto a las rentabilidad esperada de cada activo financiero. La Figura 1 representa un ejemplo gráfico de estas desviaciones para dos activos y cuatro períodos. Las desviaciones medias absolutas respecto a la media para cada período las denominamos y_t.

El parámetro ρ es la tasa de rentabilidad requerida parametrizable por cada inversor.

Dado que lo que se pretende es minimizar las desviaciones medias absolutas lo que se utiliza es una medida de riesgo (distancia o norma) L_1, en contraposición a la que utiliza la desviación estándar o L_2 [Konno, 1988].

Konno y Yamazaki [1991] prueban que utilizar el modelo anterior equivalente a utilizar el modelo de Markowitz con las siguientes ventajas:

- — No es necesario calcular la matriz de varianzas covarianzas.
- — Es fácil actualizar el modelo cuando se añaden nuevas observaciones.
- — Es mucho más fácil resolver este P.L. que el equivalente de programación cuadrática de Markowitz. La solución óptima contiene un máximo de ($2*T + 2$) variables básicas (igual al número de restricciones).

Es claro que, el hecho de plantear y, por tanto, poder resolver el modelo planteado mediante un algoritmo de programación lineal, en lugar de uno de programación cuadrática, supone evidentes ventajas en cuanto a tiempo de cálculo, capacidad del ordenador necesario y utilización de *software* estándar. Es más, algunas de las hojas de cálculo más populares en el mercado incorporan la posibilidad de resolver problemas de programación lineal como una posibilidad estándar en el propio paquete.

Además, el modelo en su versión anterior puede ser ampliado con otras restricciones adicionales que incorporen mayores posibilidades para el inversor. De esta forma podemos añadir el siguiente tipo de restricciones (deseada por muchos inversores):

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = \{1,2,\ldots,n\} \qquad [5]$$

donde u_j es la cantidad máxima a invertir en el activo j, y mediante la que se limita el tanto por uno de cada activo a incluir en la cartera final.

De manera parecida a como se hace a partir del modelo de Markowitz, modelo anterior permite derivar una relación de equilibrio entre la cartera de mercado y cada activo financiero de forma análoga al CAPM [Sharpe, 1964, y Konno y Yamazaki, 1991].

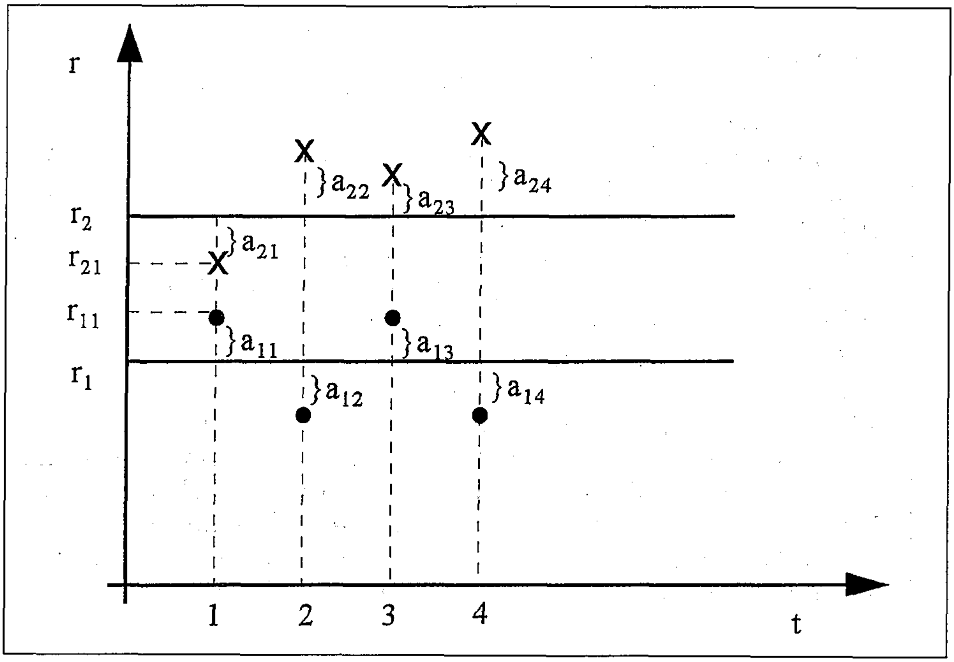
El modelo de Markowitz en su versión original, tan sólo minimiza el riesgo residual y no tiene en cuenta otros tipos de riesgo. Sin embargo, en gran medida se puede tener en cuenta el riesgo sistemático añadiendo la restricción [Dahl *et al.*, 1993]:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \leq \beta_p \qquad [6]$$

donde β_p es el riesgo sistemático máximo deseado o requerido.

FIGURA 1

EJEMPLO DE DESVIACIONES MEDIAS ABSOLUTAS



3. LA CONSTRUCCION DE ESCENARIOS Y SU UTILIZACION SOBRE UN MODELO MAD

La utilización del modelo de Markowitz con muchos activos financieros tiene el grave inconveniente que es necesario calcular una gran cantidad de covarianzas (sólo para 100 activos financieros es necesario calcular cerca de 5.000). Dada la fuerte covarianza que existe entre muchos de los activos financieros, una posible solución a este problema es usar algún tipo de factorización que agrupe todos los activos en unos pocos factores [Markowitz y Perold, 1981]. Esta solución puede ser particularmente adecuada, ya que, en la práctica, existen altísimas correlaciones entre grupos de valores o activos financieros.

Otra posible alternativa es considerar unos pocos escenarios posibles [Markowitz y Perold, 1981, y Hobman, 1975]. Estos escenarios pueden derivarse de un comportamiento histórico de los activos financieros correspondientes, pueden ser obtenidos directamente de forma subjetiva por «expertos» del mercado o una combinación de ambos.

En cualquiera de los casos, la selección de escenarios consiste en escoger un conjunto posible de «estados de la naturaleza» (escenarios), asociando a cada uno de ellos una determinada probabilidad, objetiva, subjetiva o una combinación de ambas. La ventaja de esta aproximación es que permite tener en cuenta la opinión de los expertos en todo momento. Un número limitado de escenarios es compatible con considerar la totalidad de los activos financieros o, tan sólo, un cierto número de ellos. En el caso de que se consideren un gran número de activos financieros puede dar problemas de singularidad en la matriz de covarianzas [Markowitz y Perold, 1981].

Generalmente, nos interesará considerar un número relativamente limitado de escenarios. Un ejemplo reciente y real es el que muestra la Figura 2. Este conjunto de escenarios fue diseñado por una sociedad de valores española a finales de 1995. Se trataba de prever las diferentes posibilidades sobre evolución del IBEX-35 y sobre el tipo de interés en España a lo largo de 1996 en función de los diferentes resultados derivados de las elecciones que se celebraron en España en febrero de 1996 y que, naturalmente, no se conocían a finales de 1995.

FIGURA 2

POSIBLES ESCENARIOS DISEÑADOS POR UNA SOCIEDAD DE VALORES

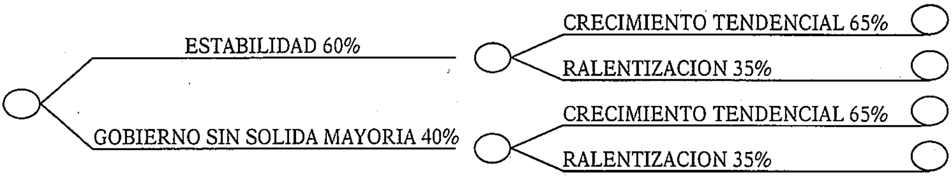
ESCENARIO A FIN DE 1996 (MEDIA PONDERADA: 3.800)					
Situación política	Tipo de interés real a L.P.*	PER medio esperable	Probab.	Beneficios: Crecimiento tendencial 65%	Beneficios: Ralentizac. (-5%) 35%
Estabilidad. Expectativas de reformas profundas del gasto público y desregulación	6,25%	11,75	60%	4.050	3.850
				IBEX esperado a 31/12/96	
Gobierno sin sólida mayoría. Expectativa de política económica débil y continuista. Alternativamente, aplazamiento electoral a 1997	7,25%	10,50	40%	3.625	3.450

* Calculado con la diferencia entre el TIR del bono a diez años y la inflación tendencial.

De los datos correspondientes a la Figura 2, se deduce el siguiente conjunto de posibilidades con sus respectivas probabilidades asociadas que se señalan en la Figura 3.

FIGURA 3

PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA ESCENARIO



Para cada escenario se puede calcular los rendimientos de cada activo financiero considerado, teniendo en cuenta que nos dan el valor de los activos financieros en el momento final y que, obviamente, conocemos los valores iniciales.

En todo caso, suponemos que los errores esperados asociados a la rentabilidad en cada rama son cero y que la covarianza entre estos errores puede ser cero o distinta de cero [Markowitz and Perold, 1981]. Por el momento, nosotros consideraremos que cada uno de los escenarios es independiente y, consecuentemente, la covarianza entre los errores de las rentabilidades esperadas será también de cero.

El concepto de escenarios que acabamos de explicar puede ser aplicado directamente al modelo de desviaciones medias absolutas explicado en el apartado anterior.

Efectivamente, en aquel modelo suponíamos que r_{jt} era una realización histórica del activo financiero j en el período t. Sin embargo, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, en lugar de tener una rentabilidad histórica r_{jt}, lo que tenemos es una rentabilidad prevista del activo financiero j en función de un determinado escenario previsto o imaginado s ($s=1,2,\ldots,S$) al que llamaremos r_{js}.

Siempre que r_{js} se comporte como una normal multivariante, y que cualquier escenario tenga una probabilidad equivalente, es claro que el problema de minimizar las desviaciones absolutas planteado inicialmente es análogo a otro en el que simplemente se sustituyan los valores de r_{jt} por r_{js}.

Ciertamente, en la mayor parte de los casos reales, los diferentes escenarios considerados no son equiprobables. Supongamos que la probabilidad de cada escenario s es $p(s)$. Entonces la rentabilidad esperada para cada activo financiero j es ahora:

$$e_j = \sum_{s=1}^{S} p(s)\, r_{js}$$

Naturalmente:

$$\sum_{s=1}^{S} p(s) = 1$$

La rentabilidad total esperada bajo el escenario s será, por tanto, ahora:

$$e(s) = \sum_{j=1}^{n} p(s)\, r_{js}\, x_j$$

A partir de estos cálculos, podemos plantear el problema de minimizar las desviaciones absolutas con diferentes escenarios y probabilidades no iguales, aunque independientes, de la siguiente forma:

$$\min \sum_{s=1}^{S} p(s)\, y_s \qquad [7]$$

$$\sum_{j=1}^{n} p(s)\,(r_{js} - e_j)\, x_j + p(s)\, y_s \geq 0 \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [8]$$

$$-\sum_{j=1}^{n} p(s)\,(r_{js} - e_j)\, x_j + p(s)\, y_s \geq 0 \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [9]$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j\, x_j \geq \rho \qquad [10]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad [11]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j\, x_j \leq \beta_p \qquad [12]$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [13]$$

La función objetivo y las restricciones [8] y [9] se pueden reescribir [Villalba, 1974] como:

$$\min \sum_{s=1}^{S} p(s)\,(y_s^+ + y_s^-) \qquad [14]$$

$$\sum_{j=1}^{n} p(s)\,(r_{js} - e_j)\,x_j + p(s)\,y_s^- - p(s)\,y_s^+ = 0 \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [15]$$

donde y_s^- e y_s^+ son las desviaciones negativas o positivas con respecto a la rentabilidad esperada en cada escenario.

La ecuación [15] puede simplificarse y reescribirse como:

$$\sum_{j=1}^{n} (r_{js} - e_j)\,x_j + y_s^- - y_s^+ = 0\,, \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [15]$$

La formulación [14], [16] y [10] a [13] representa un modelo de P.L. en el que se consideran un número S de escenarios independientes con probabilidades no equiprobables.

4. EL MODELO MAD CON ESCENARIOS Y FUNCION DE RIESGO ASIMETRICA

La mayoría de los inversores, particularmente si son personas físicas, tienen una aversión al riesgo no simétrica y, desde luego, creciente. Esto es, no penalizan la varianza en sí misma sino la semivarianza negativa (2).

En todo caso, parece claro que el inversor penaliza rentabilidades inferiores a una cierta rentabilidad mínima aceptable (véase apartado 5 para una exposición más precisa de este concepto), y además esta penalización es generalmente creciente, esto es, aumenta más que proporcionalmente a medida que la rentabilidad es más baja.

Un tipo de función que podría reflejar la idea anterior sería como la de la Figura 4, en la que una rentabilidad igual a la esperada para el acti-

(2) Aunque de hecho, si la distribución es simétrica, minimizar la semivarianza negativa es equivalente a minimizar la varianza [Markowitz, 1959, cap. 9). La equivalencia no se produce si la función de riesgo es asimétrica.

vo financiero j (e_j) tiene una penalización de cero, mientras que las rentabilidades inferiores a ésta tienen una penalización creciente.

La consideración de penalizaciones asimétricas y «no lineales» puede ser aplicado al problema anterior de forma análoga a como puede verse en Villalba y Jerez [1990], con lo cual el problema queda como:

$$\min \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, p(s) \, y^-_{sk} \qquad [17]$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} (r_{js} - e_j) \, x_j + \sum_{k=1}^{K} y^-_{sk} - y^+_s = 0 \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [18]$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \, x_j \geq \rho \qquad [19]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad [20]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, x_j \leq \beta_p \qquad [21]$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = \{1,2,\ldots,n\} \qquad [22]$$

$$y^-_{sk} \leq \overline{y}_{sk} \qquad j = \{1,2,\ldots,S\} \quad k = \{1,2,\ldots,K\} \qquad [23]$$

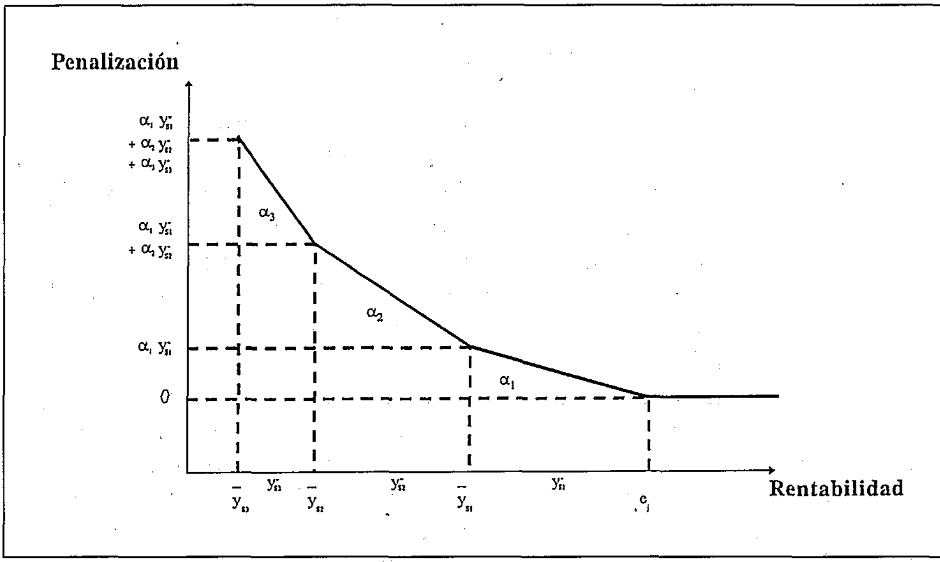
donde:

y^-_{sk} ... Son las desviaciones negativas hasta $\overline{y}_{sk}$ con respecto a la rentabilidad esperada en cada escenario.

y^+_s ... Son las desviaciones positivas con respecto a la rentabilidad esperada en cada escenario.

FIGURA 4

FUNCION DE RIESGO ASIMETRICA



Como puede observarse, ahora lo que minimizamos es la suma de desviaciones negativas de manera creciente con respecto a las rentabilidades esperadas. Otra forma de interpretar esta formulación es la de penalizar de manera creciente no alcanzar el valor esperado para cada posible escenario, teniendo en cuenta la probabilidad de que efectivamente se produzca el escenario.

Este modelo tiene la gran flexibilidad de poder tener en cuenta diferentes escenarios con probabilidades no necesariamente iguales para cada uno de ellos y la posibilidad de construir funciones de riesgo a la medida de cada inversor, similares a las indicadas en la Figura 4.

Desde un punto de vista de cálculo, el modelo es enormemente fácil de resolver ya que el planteamiento es estrictamente de P.L.

En la formulación anterior, el conjunto de pares α_k y $\overline{y}_{sk}$ miden la aversión particular al riesgo de cada inversor. La determinación de estos valores se puede hacer preguntando directamente al hipotético inversor. Sin embargo, sería conveniente estudiar con más profundidad una metodología adecuada para reflejar con la mayor precisión posible la verdadera función de aversión al riesgo del inversor.

5. LA RENTABILIDAD MINIMA ACEPTABLE

Es claro que en el planteamiento del apartado anterior, minimizamos una función de desviaciones respecto a unas rentabilidades esperadas de cada activo financiero e_i.

Sin embargo, cuando se enfrentan a una inversión, la mayor parte de los inversores tienden a pensar en una cifra de rentabilidad única para toda su cartera, por debajo de la cual piensan en términos negativos y por encima de la cual entienden que la rentabilidad que obtienen es como mínimo de razonable hasta muy buena. Esta cifra que separa la línea divisoria entre que el inversor se siente a «disgusto» o «confortable» es lo que denominamos «rentabilidad mínima aceptable». Para valores de rentabilidad iguales o superiores a esta rentabilidad mínima aceptable no se establece ninguna penalización en su función de utilidad. Para valores inferiores se establecen penalizaciones en la función de utilidad del inversor que generalmente crecen más que proporcionalmente en función de la diferencia con respecto a esta rentabilidad mínima aceptable. Un ejemplo de este tipo de actitud podría ser la de aquel inversor cuya rentabilidad mínima aceptable es la que ofrece el activo sin riesgo. Cualquier rentabilidad por debajo de la de aquél tendría una penalización creciente a medida que se alejara más de esa rentabilidad mínima aceptable.

Es preciso distinguir entre esta rentabilidad mínima aceptable y la rentabilidad requerida o deseada por el inversor. Esta última es la que denominamos en nuestro modelo p y es aquella que el inversor desea alcanzar y que, normalmente, será distinta y más alta que la que está dispuesto a admitir sin penalización. El lado izquierdo de [19] calcula la rentabilidad esperada de la cartera y obliga a satisfacer la rentabilidad requerida por el inversor p. Como es bien conocido, cuanto mayor sea la rentabilidad requerida, mayor será el riesgo que el inversor deberá estar dispuesto asumir. Aún más, si p es suficientemente alto la solución puede ser simplemente infactible.

Los conceptos anteriores nos dan una gran flexibilidad para definir con todo detalle la función de utilidad del inversor. Así, algunos inversores pueden requerir una rentabilidad alta y tener una función de riesgo tal que sólo penalicen las desviaciones a partir de una rentabilidad mínima aceptable relativamente baja o cualquier otra combinación deseada.

La rentabilidad mínima aceptable se puede introducir en el modelo anterior sustituyendo en [18] la rentabilidad esperada e_i por e. De esta forma, podemos ahora reescribir el modelo anterior como:

$$\min \sum_{s=1}^{S} \sum_{k=1}^{K} a_k \, p(s) \, y_{sk}^{-} \qquad [24]$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} (r_{js} - \underline{e}) \, x_j + \sum_{k=1}^{K} y_{sk}^{-} - y_s^{+} = 0 \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [25]$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \, x_j \geq \rho \qquad [26]$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad [27]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, x_j \leq \beta_p \qquad [28]$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = \{1,2,\ldots,n\} \qquad [29]$$

$$y_{sk}^{-} \leq \overline{y}_{sk} \qquad j = \{1,2,\ldots,S\} \quad k = \{1,2,\ldots,K\} \qquad [30]$$

Ahora, [25] puede simplificarse y queda como:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{js} \, x_j + \sum_{k=1}^{K} y_{sk}^{-} - y_s^{+} = \underline{e} \qquad s = \{1,2,\ldots,S\} \qquad [31]$$

puesto que, teniendo en cuenta [27], es claro que:

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{e} \, x_j = \underline{e} \qquad [32]$$

6. FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARA CADA ESCENARIO Y LA RENTABILIDAD MINIMA GARANTIZADA

Una gran parte de los inversores no está dispuestos a admitir en absoluto que la rentabilidad de su inversión sea inferior a un cierto límite profijado. Naturalmente, si suponemos que la rentabilidad de esa inversión está sujeta a una función de distribución con colas infinitas (por ejemplo, una función de distribución normal o lognormal), es evidente que siempre existirá una probabilidad, por pequeña que ésta sea, de tener una rentabilidad suficientemente pequeña o negativa. Por otro lado, es evidente que, en la práctica, la función de distribución de probabilidad de las inversiones tienen colas finitas que pueden cuantificarse razonablemente sobre la base de datos históricos u otro tipo de cálculos. Ello es cierto en aquellos casos en los que, en lugar de considerar una distribución teórica conocida, ésta se sustituye por funciones de probabilidad subjetivas proporcionadas por expertos. En este último caso tenemos generalmente funciones de probabilidad discretas y truncadas en sus rentabilidades mínimas y máximas y, por tanto, es posible «asegurar» (obviamente, si se cumple la función de distribución prevista por el experto) una rentabilidad mínima garantizada. Es decir, aquella a partir de la cual «no es posible» tener ninguna rentabilidad inferior.

A partir del modelo anterior, es fácil calcular la función de distribución de probabilidad de la rentabilidad de cada escenario y la rentabilidad mínima garantizada, teniendo en cuenta naturalmente, que tan sólo es posible que en «realidad» sucedan alguno de los escenarios previstos.

Efectivamente, finalmente la «realidad» consistirá en un único estado de la naturaleza correspondiente a alguno de los escenarios previstos. Si x_j^*, es el porcentaje de cada activo financiero j a invertir en el óptimo, entonces la rentabilidad esperada bajo el escenario s será:

$$r^*(s) = \sum_{j=1}^{n} r_{js}\, x_j^*$$

y la rentabilidad esperada en la solución óptima será:

$$r^* = \sum_{s=1}^{S} p(s)\, r^*(s) = \sum_{j=1}^{n} e_j\, x_j$$

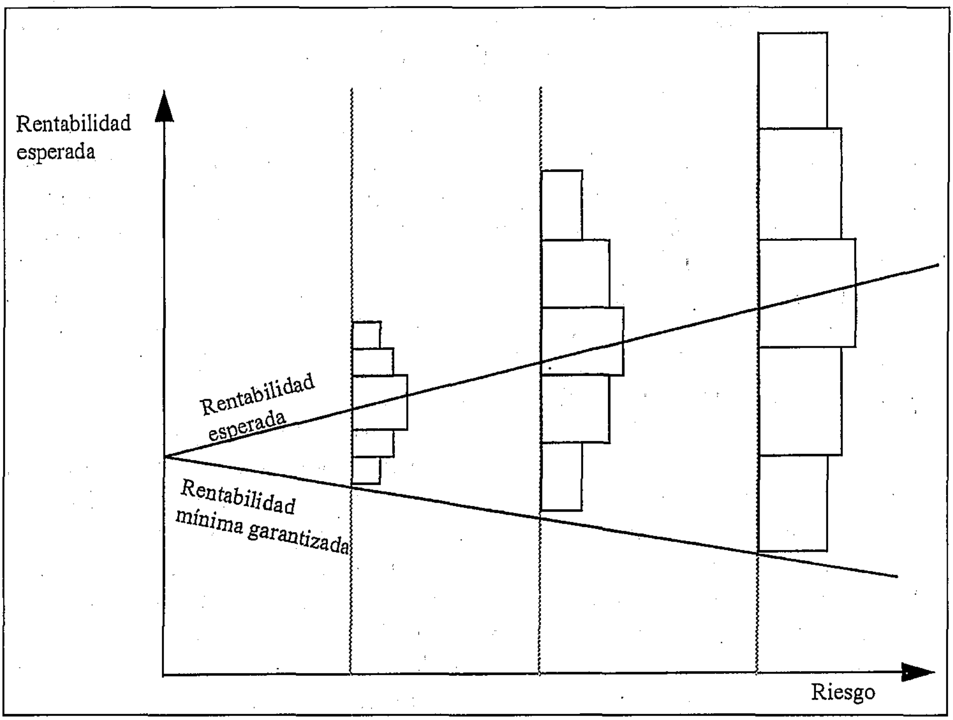
que será igual o superior a la rentabilidad requerida por el inversor p.

El inversor puede limitar la rentabilidad mínima para cualquier posible escenario o para toda la cartera dando los valores deseados a $\overline{y}_{sk}$ en [30].

Naturalmente, a medida que aumente la rentabilidad esperada de la cartera, la desviación con respecto a la rentabilidad mínima aceptable será mayor y, por tanto, la rentabilidad mínima garantizada será menor. La Figura 5 representaría un comportamiento típico de este tipo de función en el que los diferentes escenarios siguen una función de distribución discreta con colas limitadas.

FIGURA 5

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARA DIFERENTES RENTABILIDADES ESPERADAS



A partir de la formulación anterior, es fácil calcular otros parámetros básicos como medianas, percentiles o, por ejemplo, la probabilidad de tener una rentabilidad inferior o superior a una predeterminada.

7. EL MODELO MAD CON ESCENARIOS Y FUNCION DE RIESGO ASIMETRICA APLICADOS A UN CASO DEL MERCADO ESPAÑOL

En el apartado 3 exponíamos un ejemplo de los diferentes escenarios proyectados por una sociedad de valores del mercado madrileño a finales de 1995, en función de dos acontecimientos (estados de la naturaleza) posibles. Por un lado, los dos grandes resultados previstos en esas elecciones eran los siguientes: el nuevo gobierno surgido de las elecciones generales de 1995 tendría estabilidad y, por tanto, podría acometer reformas profundas del gasto y desregular o que, de las elecciones, no saldría una mayoría sólida, lo que supondría una política débil y continuista. A cada uno de estos posibles escenarios se le había asignado una probabilidad del 60 por 100 a la primera y el 40 por 100 a la segunda y unos ciertos valores previstos del IBEX-35 y de los tipos de interés real. Independientemente de las elecciones, se suponía en estos escenarios previstos que los beneficios de las empresas podían tener un crecimiento tendencial con una probabilidad del 65 por 100 o bien una ralentización con una disminución de beneficios con una probabilidad del 35 por 100. La hoja que resumía estos escenarios, sus probabilidades y valores finales se han expuesto en la Figura 3.

De las probabilidades y valores proyectados para los diferentes escenarios y de los valores iniciales correspondientes a principio de año hemos calculado las rentabilidades con sus probabilidades asociadas para cada activo financiero que figuran en el Cuadro 1.

Como puede observarse en este Cuadro se han considerado el IBEX-35 y cuatro activos financieros de renta fija: Bonos a diez años, cinco años, tres años y Letras a un año. Puesto que no se tenía información sobre la «inflación tendencial» que señalaba el documento original por la sociedad de valores se ha supuesto que ésta sería de un 3 por 100. Finalmente, se ha supuesto que los diferenciales de los distintos tipos de renta fija se mantendría con respecto al bono a diez años. Lógicamente se podrían adoptar hipótesis distintas para calcular la rentabilidad de cada tipo de activo financiero pero ello no cambiaría para nada el planteamiento del problema ni la forma de resolverlo.

En los Cuadros 2 y 3 se indican, en recuadros con doble raya, los *inputs* iniciales señalados por el hipotético inversor. Los resultados procedentes de la optimización, conforme al modelo especificado en el apartado 6, ecuaciones [24] a [30], se señalan en recuadros con tramo grueso.

CUADRO 1

RENTABILIDADES PREVISTAS PARA CADA ESCENARIO CON SUS PROBABILIDADES ASOCIADAS

DATOS

Ejemplo elecciones generales de 1996. Escenarios previstos

Escenarios	Gobierno	Probabil.	Beneficios	Probabil.	Probabil.
A	May. estable	0,6	Crec. tend.	0,65	0,39
B	May. estable	0,6	Ralentiz.	0,35	0,21
C	May. no est.	0,4	Crec. tend.	0,65	0,26
D	May. no est.	0,4	Ralentiz.	0,35	0,14
					1,00

Inflación tendencial 3

Valores iniciales = cotizaciones al 31/12/95 Elecciones febrero-96

Escenarios	IBEX-35	Bonos 10-A.	Bonos 5-A.	Bonos 3-A.	Letras 1-A.	Probabil.
Inicial	3543,54	9,702	9,38	9,131	8,77	
A	4050	9,25	8,928	8,679	8,318	0,39
B	3850	9,25	8,928	8,679	8,318	0,21
C	3625	10,25	9,928	9,679	9,318	0,26
D	3450	10,25	9,928	9,679	9,318	0,14
Media	3813,5	9,65	9,328	9,079	8,718	1,00

Rendimiento considerado = 9 meses elevado a anual
9

Escenarios	IBEX-35	Bonos 10-A.	Bonos 5-A.	Bonos 3-A.	Letras 1-A.	Probabil.
A	19,4970%	13,8551%	11,2068%	10,0406%	8,7700%	0,39
B	11,6943%	13,8551%	11,2068%	10,0406%	8,7700%	0,21
C	3,0768%	4,8910%	7,2152%	8,0432%	8,7700%	0,26
D	-3,5041%	4,8910%	7,2152%	8,0432%	8,7700%	0,14
Rent. esper.	10,3690%	10,2694%	9,6102%	9,2417%	8,7700%	

En el caso concreto que estamos tratando, suponemos que el inversor no penaliza los rendimientos superiores a los del activo financiero sin riesgo (Letras a un año) que es del 8,77 por 100 anual. Los rendimientos menores a este mínimo los penaliza deforma creciente, de tal forma que los rendimientos hasta dos puntos por debajo del mínimo (es decir, entre 8,77 por 100 y 6,77 por 100) tienen una penalización de uno. Los rendimientos por debajo del 6,77 por 100 hasta el 0 por 100 tienen una penalización del doble que los que anteriores y, finalmente, las rentabilidades negativas (por debajo de cero) tienen una penalización cuatro veces superior a la que tienen rentabilidades hasta dos puntos inferiores a la rentabilidad mínima aceptable. La rentabilidad mínima permitida por el inversor en cualquier circunstancia es, por tanto, de un –5 por 100.

En el Cuadro 2, la rentabilidad mínima requerida por el inversor es del 9 por 100 y en el Cuadro 3 del 10 por 100. En el primer caso el óptimo consiste en invertir casi por partes iguales en Bonos a tres años y Letras a un año y su rentabilidad mínima garantizada es del 8,42 por 100, muy superior al –5 por 100 que estaría dispuesto a aceptar por el inversor. En el segundo, se invierte aproximadamente un 60 por 100 en bonos a diez años y un 40 por 100 en bonos a cinco años. La rentabilidad esperada es ahora un punto porcentual superior (del 9 por 100 al 10 por 100) pero, sin embargo, la rentabilidad mínima garantizada ha disminuido hasta el 5,84 por 100, esto es 2,58 puntos menos aunque sigue estando alejada de lo que está dispuesto a aceptar el inversor.

La Figura 6 nos muestra la frontera eficiente, aplicado a caso anterior y teniendo en cuenta que la función de riesgo es la indicada por el inversor y las previsiones sobre los diferentes escenarios son los previstos por los expertos de la sociedad de valores.

CUADRO 2

DATOS Y SOLUCION CON UNA RENTABILIDAD REQUERIDA DEL 9 POR 100

REQUERIMIENTOS DEL INVERSOR

RENTABILIDADES	
Rentabilidad requerida (p)	9,00%
Rent. mínima aceptable(e)	8,77%

LIMITES Y COSTES	tramo +	1er. tramo -	2º tramo -	3er. tramo -
Coste	0	1	2	4
Puntos % inferior a limites	20,00%	-2,00%	-8,77%	-13,77%
... y la rent. max/min. sería	28,77%	6,77%	0,00%	-5,00%

SOLUCION

SOLUCION OPTIMA

IBEX-35	Bonos 10-A.	Bonos 5-A.	Bonos 3-A.	Letras 1-A.
0,00%	0,00%	0,00%	48,76%	51,24%

ESTUDIO DE RENTABILIDAD PARA CADA POSIBLE ESCENARIO

Rentabilidad esperada (r*)..............	9,00%
Rentabilidad mínima garantizada.........	8,42%

Realidad es Escenario:	Rentab. esperada	Probabilidad Escenario	Desviación sobre e
A	9,39%	0,39	0,62%
B	9,39%	0,21	0,62%
C	8,42%	0,26	-0,35%
D	8,42%	0,14	-0,35%

CUADRO 3

DATOS Y SOLUCION CON UNA RENTABILIDAD REQUERIDA DEL 10 POR 100

REQUERIMIENTOS DEL INVERSOR

RENTABILIDADES	
Rentabilidad requerida (p)	10,00%
Rent. mínima aceptable(e)	8,77%

LIMITES Y COSTES	tramo +	1er. tramo -	2º tramo -	3er. tramo -
Coste	0	1	2	4
Puntos % inferior a limites	20,00%	-2,00%	-8,77%	-13,77%
... y la rent. max/min. sería	28,77%	6,77%	0,00%	-5,00%

SOLUCION

SOLUCION OPTIMA

IBEX-35	Bonos 10-A.	Bonos 5-A.	Bonos 3-A.	Letras 1-A.
0,00%	59,13%	40,87%	0,00%	0,00%

ESTUDIO DE RENTABILIDAD PARA CADA POSIBLE ESCENARIO

Rentabilidad esperada (r*)...............	10,00%
Rentabilidad mínima garantizada.........	5,84%

Realidad es Escenario:	Rentab. esperada	Probabilidad Escenario	Desviación sobre e
A	12,77%	0,39	4,00%
B	12,77%	0,21	4,00%
C	5,84%	0,26	-2,93%
D	5,84%	0,14	-2,93%

La Figura 7 nos indica la función de distribución de rentabilidad-riesgo correspondiente a las posibles realizaciones señaladas en los Cuadros 2 y 3.

El caso que acabamos de analizar es bastante simple en términos de número de escenarios y número de activos financieros. Sin embargo, muchas de las situaciones se contemplan con un número relativamente pequeño de escenarios, buena prueba de ello, es el caso anterior, cuyos escenarios fueron planteados por una de las sociedades de valores más importantes de España y con un gran crédito internacional en sus análisis. Por otra parte, es conocido que la mayor parte de la rentabilidad de una cartera puede explicarse en función de grandes grupos de activos financieros en los que invierte y en muy poca medida en los activos concretos de cada grupo. En este sentido puede verse, por ejemplo, Brinson Hood y Beebower [1986 y 1991].

En todo caso, la metodología desarrollada en este artículo permite tener en cuenta modelos de gran complejidad. Actualmente es posible resolver programas lineales con miles de variables y restricciones con un *software* barato y un ordenador personal.

FIGURA 6

FRONTERA EFICIENTE

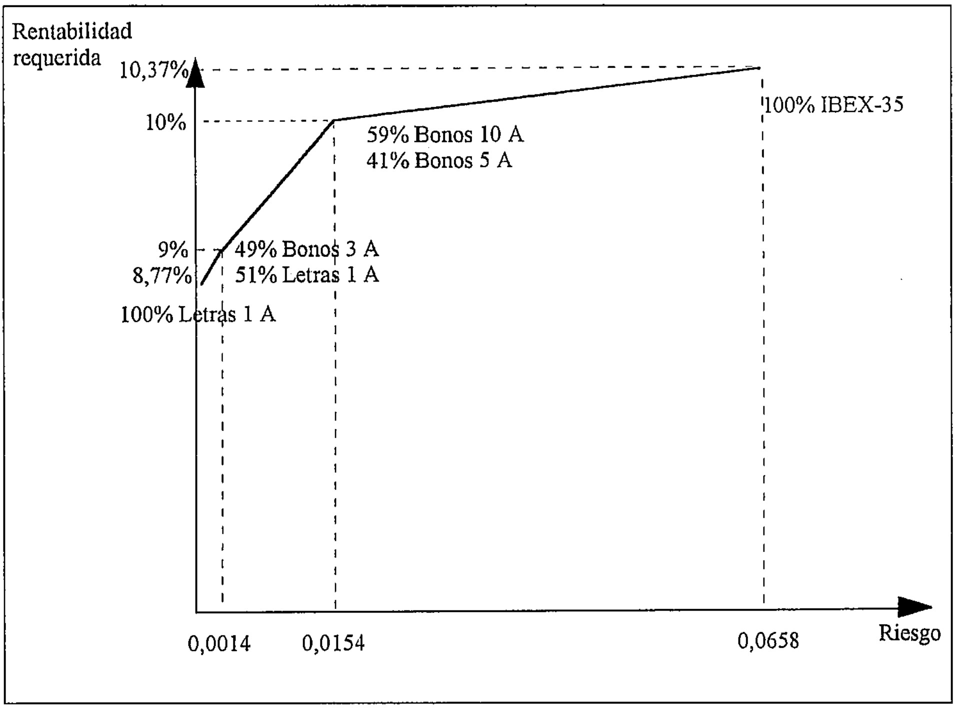
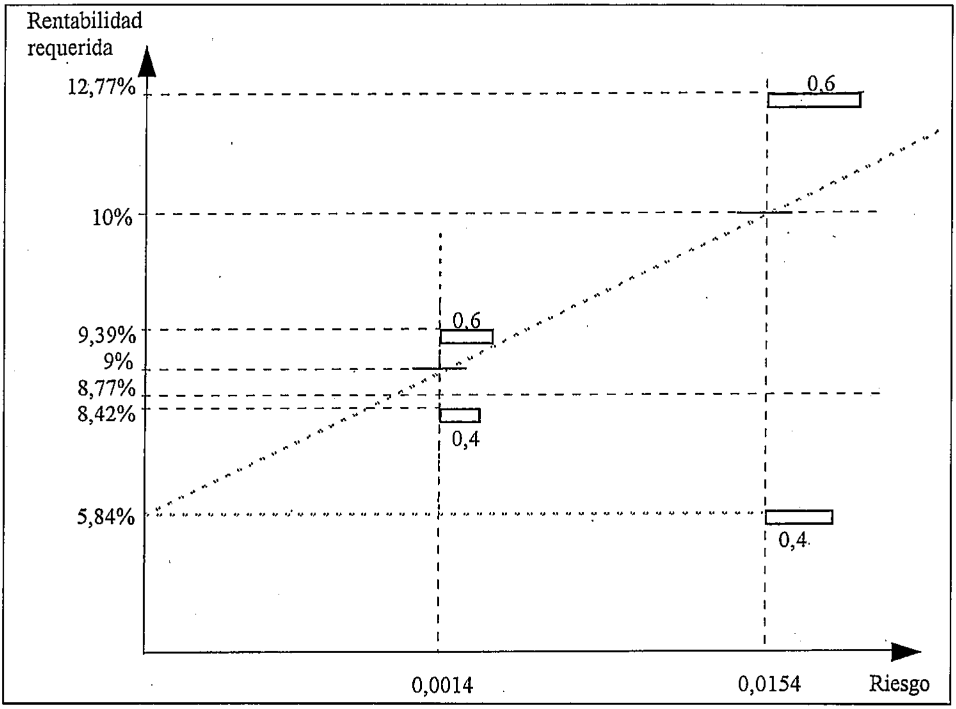


FIGURA 7

FUNCIONES DE DISTRIBUCION PARA RENTABILIDADES REQUERIDAS DEL 9 POR 100 Y DEL 10 POR 100



8. CONCLUSIONES

El modelo de Markowitz es la base de la mayoría de los modelos de selección de cartera. Sin embargo, su utilización real se puede considerar que ha sido escasa.

Konno y Yamazaki han propuesto recientemente un modelo que resuelve una parte de los problemas prácticos del modelo original de Markowitz, pero no tiene en cuenta dos elementos básicos para cualquier inversor: la posibilidad de incorporar diferentes visiones subjetivas u objetivas de cómo pueden comportarse las rentabilidades de los activos financieros en función de variables políticas o económicas y la posibilidad de utilizar funciones asimétricas de riesgo en las que se penalicen tan sólo las desviaciones negativas con respecto a una rentabilidad mínima aceptable por el inversor.

El modelo desarrollado en este artículo parte del modelo de Konno y Yamazaki pero incorpora la posibilidad de tener en cuenta diferentes posibles escenarios a los que se asocia una probabilidad a cada uno de ellos. También incorpora funciones asimétricas de riesgo y la posibilidad de incorporar una «rentabilidad mínima aceptable» por el inversor. Todo ello, sin perder la condición de linealidad del modelo, lo que facilita su utilización real y permite una mayor flexibilidad para incorporar los deseos de los inversores.

También se explica cómo explotar, para el inversor, toda la información generada por el modelo, más allá de la simple recomendación de los porcentajes que deben invertirse en cada activo financiero en el óptimo.

Finalmente, se presenta un caso real aplicado a la Bolsa española en donde, a partir de los escenarios establecidos por una sociedad de valores y bolsa y de las preferencias de un supuesto inversor, se obtienen las recomendaciones para su inversión óptima junto con una extensa información adicional que debe ayudarle a tomar la decisión más adecuada.

BIBLIOGRAFIA

BRINSON, G. P.; HOOD, L. R., y BEEBOWER, G. L. [1986]: «Determinants of portfolio performance», *Financial Analyst journal,* July-August 1986, pp. 39-44.

— [1991]: «Determinants of portfolio performance II. An Update», *Financial Analyst journal,* May-June 1991, pp. 40-48.

CHOPRA V. K., y ZEMBA, W. T. [1993]: «The effects of errors in Means, Variantes and Covariances in Optimal Choice», *The Journal of Portfolio Management,* pp. 1739-1764.

DAHL, H.; MEERAUS, A., y ZENIOS, S. A. [1993]: «Some financial optimization models: I Risk management», en ZENIOS, S. A. (ed.), *Financial Optimization,* Cambridge University Press.

FRANKFURTER, G. M., y PHILLIPS, H. E. [1995]: *Forty Years of Normative Portfolio Theory: Issues, Controversies and Misconceptions,* JAI Press.

HOBMAN, R. J. [1975]: «Setting investment policy in an ERISA environment», *Journal of Portfolio Management,* Fall 1975, pp. 17-21.

KONNO, H. [1988]: «Portfolio Optimization using L1 Risk Function», *IHSS Report* 88-9, Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology (September, 1988).

KONNO, H., y YAMAZAKI, H. [1991]: «Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market», *Management Science*, vol. 37, n.° 5, May 1991, pp. 519-531.

MARKOWITZ, H. M. [1959]: «Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments», *Cowles Foundation*, Monograph 16 Yale University Press, 1959.

— [1952]: «Portfiolio Selection», *Journal of Finance*, March 1952, pp. 77-91.

MARKOWITZ, H. M., y PEROLD, A. F. [1981]: «Portfolio Analysis with Factors and Scenarios», *The Journal of Finance*, vol. XXXVI, n.° 14, September 1981, pp. 871-877.

MICHAUD, R. O. [1989]: «The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal?», *Financial Analyst Journal*, January-February 1989, pp. 31-42.

RAO, C. R. [1965]: *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd. Edition, John Wiley & Sons, New York.

SHARPE WILLIAM, F. [1964]: «Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk», *Journal of Finance*, September 1964, pp. 425-452.

VILLALBA VILÁ, D. [1974]: «Programación por Objetivos», *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, n.° 8, abril-junio, pp. 161-178.

VILLALBA VILÁ, D., y JEREZ MÉNDEZ, M. [1990]: *Sistemas de Optimización para la Planificación y Toma de Decisiones*, Pirámide.