REVISTA ESPAÑOLA DE FINANCIACION Y CONTABILIDAD
Vol. XXIV, n.º 83
abril-junio 1995
pp. 501-513

Francisco P. Calatayud
Profesor Titular
Universidad de La Laguna
(Sta. Cruz de Tenerife)

LA INMUNIZACION DE CARTERAS COMO ESTRATEGIA MAXIMIN (*)

*Resumen.—Abrastract.—*1. *Introducción.—*2. *El modelo.—*3. *Una demostración alternativa.—*4. *Conclusiones.—Referencias*

RESUMEN

EN este trabajo se demuestra que la estrategia inmunizadora (i.e. aquella que iguala la longitud del período de planificación a la duración de la cartera) no sólo asegura una rentabilidad final igual o superior a la prometida inicialmente para una estructura temporal de tipos de interés dada, sino que, además, ante desplazamientos paralelos de la curva de rendimientos tal estrategia proporciona un resultado maximin en el plano (α,k) de pares «variaciones en los rendimientos/longitud del período planificador»; esto es, el mejor de entre los resultados más desfavorables posibles para cada horizonte de planificación. Este resultado difiere de Bierwag y Khang (1979) y Bierwag, Kaufman y Toevs (1982) en la elección de la variable de decisión (longitud del período de

(*) El autor agradece a los asistentes al II Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras celebrado en Alicante en marzo de 1994 sus comentarios a una versión preliminar de este trabajo, así como las sugerencias de un evaluador anónimo de la R.E.F.C. que han servido para mejorar la versión actual. Los errores, si permanecen son de exclusiva responsabilidad del autor.

planificación vs. vector de proporciones de los bonos en la cartera) y en la metodología utilizada.

PALABRAS CLAVE: Duración, Inmunización, Juegos estáticos.
CLASIFICACION J.E.L.: G11, G29.

ABSTRACT

In this paper we demonstrate that the immunization strategy (i.e., the strategy matching the length of the planning period with the portfolio duration) not only reaches a final rate of return equal or higher to the initially promised rate for the given, observable, term structure of interest rates but that, when facing parallel shifts of the yield curve, it also provides a maximin solution in the space (α,k) of pairs «returns shocks / planning period length»; that is, the better between the worse possible solutions for each planning period. This result differs from the results obtained in Bierwag y Khang (1979) and Bierwag, Kaufman y Toevs (1982) in the choice of the decision variable: in this paper we propose the planning period length while they both utilized a vector of weigths of the portfolio's bonds. We also differ in the metodology employed to prove the maximin result.

KEYWORDS: Duration, Immunization, Static Games.
JOURNAL OF ECONOMIC LITERATURE CLASSIFICATION NUMBERS: G11, G29

1. INTRODUCCION

En Bierwag (1991, pp. 127-132) se demuestran, a partir del estudio de la convexidad de la función $V_k(\alpha)$ (valor de una cartera al cabo de k períodos, tras un cambio instantáneo en $t = 0$ de los rendimientos, desde r a $r + \alpha$) dos resultados importantes. A saber: a) siempre que los tipos de interés sean no negativos, cada curva $V_k(\alpha)$, para cualquier k y flujos de caja dados, tiene un mínimo para algún valor de α y b) si k coincide con la duración de la cartera, entonces el mínimo tiene lugar para $\alpha = 0$, esto es, conservando la cartera un número de períodos igual los de la duración se garantiza un rendimiento igual, al menos, al prometido en origen para un escenario de constancia en la estructura temporal de tipos de interés.

Adicionalmente, en Bierwag y Khang (1979) y en Bierwag, Kaufman y Toevs (1982) se aborda la cuestión de cómo varía aquel mínimo si se altera la composición de la cartera, esto es, si se alteran las proporciones de inversión inicial en los diferentes bonos disponibles en el mercado (u_i, tales que $\Sigma u_i = 1$, no admitiéndose posiciones «cortas»). El resultado es que la estrategia de inmunización (es decir, aquella que iguala el horizonte de planificación de la inversión, k, con la duración de la cartera, D) proporciona el mayor mínimo posible. En otras palabras, dado un horizonte de planificación, k, considérense carteras con duraciones diferentes. Cualquiera de esas carteras tendrá un valor final, al cabo de los k períodos V_k $(\alpha,\hat{\mathbf{U}})$ (1). El mínimo de cada uno de estos valores finales tiene lugar para cada duración que inicialmente se hubiese podido escoger. Pues bien, se demuestra que el máximo de todos los mínimos posibles tiene lugar para aquellas carteras cuya duración D coincida con k. En definitiva, como se indica en Prisman y Shores (1988) la estrategia de inmunización es, de hecho, una estrategia maximin.

La metodología utilizada para derivar este último resultado se basa en la resolución del siguiente problema de optimización (Prisman y Shores [1988])

$$\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{u_i} \; [\min\limits_{\alpha} V_k(\alpha,\hat{\mathbf{U}})] \\ s.a. \quad u_i \geq 0 \\ \sum u_i P_i = 1 \end{array}\right.$$

siendo P_i los precios iniciales de los bonos que componen la cartera, y suponiendo (sin pérdidad de generalidad) que la inversión inicial es de 1\$.

Esto es, las variables de control del problema de optimización son las proporciones de los bonos en la cartera óptima $\hat{\mathbf{U}}$ mientras que α, la variacion instantánea en los tipos de interés, es la variable de estado.

En este artículo, se propone una nueva metodología, para derivar el mismo resultado, que supone una considerable simplificación en cuanto al instrumental matemático utilizado, al tiempo que, creemos, resulta más sencilla de interpretar. Así, no se considerarán grados de libertad del problema las proporciones u_i de la cartera junto con las variaciones instantáneas α de las tasas de rendimiento; sino éstas y el horizonte de planificación k del agente inversor. Por otro lado, se tomará como función objetivo la tasa de rendimiento alcanzada realmente («tasa realizada») de la cartera, en lugar del valor final de la misma, lo cual no supone altera-

(1) Siendo $\hat{\mathbf{U}} = (u_1, \dots, u_n)$ el vector de proporciones que define a esa cartera.

ción alguna en los supuestos de comportamiento del agente inversor, toda vez que ambas funciones (Valor final y Tasa realizada) son la misma salvo una transformación monótona, y sí supone una notable simplificación de los cálculos.

En estas condiciones se demuestra que en el plano (k,α), el punto (D,0) constituye, efectivamente un punto de ensilladura (i.e., un resultado maximin), siendo las rentabilidades realizadas a lo largo de α, para k = *cte.*, funciones convexas que alcanzan su mínimo sobre una función φ (k,α) perfectamente caracterizada, orientada de SW a NE, en la matriz de todas las rentabilidades realizadas posibles y, alcanzando la función (2) de rentabilidades realizadas posibles sobre esa traza φ (k,α) un máximo, precisamente, en (D,0).

El resto de este trabajo se estructura como sigue: en el siguiente apartado se presentan las hipótesis del modelo, se recuerda el procedimiento de Bierwag (1991) para demostrar que la estrategia inmunizadora consiste en igualar la duración de la cartera con el horizonte de planificación y se recuerda la metodología de Bierwag y Khang (1979) para demostrar que la estrategia inmunizadora es una estrategia maximin en el espacio $(\alpha,\hat{\mathbf{U}})$.

En el tercer apartado se introduce la función rentabilidad realizada como función objetivo y se obtienen los resultados descritos.

Finalmente, en un cuarto epígrafe se presentan las conclusiones y se sugieren algunas vías de extensión del presente ejercicio de investigación.

2. EL MODELO

i) Se supone que el tiempo varía en forma discreta (lo que obliga a la consideración de la ley de capitalización compuesta) (3) siendo la unidad temporal utilizada el día.

ii) Existen, en el momento de planificación de la inversión, n bonos disponibles en el mercado, a unos precios $P_i(0)$ y que garantizan (se supone que son bonos libres de riesgo de insolvencia) a su poseedor una se-

---

(2) Que denominaremos «ruta de expansión de las estrategias de inmunización».

(3) En la literatura citada, en general, se supone una variación continua, lo cual, si bien facilita los cálculos, provoca una evidente pérdida de realismo.

rie de flujos de caja $S_{t,i}$ distribuidos sobre el intervalo $(0,T_i)$, siendo T_i el día de maduración (el vencimiento) del bono i.

iii) El inversor planifica su inversión a k períodos, distribuyendo su riqueza inicial (que suponemos de 1 $, sin que ello suponga pérdida de generalidad) entre los n bonos disponibles en el momento $k = 0$, en proporciones dadas por el vector $\hat{\mathbf{U}} = (u_1, \dots , u_n)$, tal que $\sum u_i P_i = 1$. No están permitidas las ventas en descubierto, de modo que $u_i \geq 0$, $\forall i$.

iv) El inversor es un inmunizador, esto es, es extremadamente averso al riesgo. Sólo emprenderá una estrategia inversora en bonos con cupón explícito si se le garantiza que tal inversión alcanzará al final de su período de planificación un rendimiento igual o mayor que el que obtendría si hubiese situado su riqueza inicial en un bono cupón cero con vto. al final de su período de planificación (y, por tanto, con rendimiento esperado cierto).

v) La estructura temporal de tipos de interés (E.T.T.I.) es «plana», esto es, los tipos a corto igualan a los tipos a largo y se permiten exclusivamente shocks estocásticos, de la referida estructura, aditivos, es decir, consistentes en desplazamientos paralelos de su curva representativa (4).

La notación que se utilizará para describir estos hechos será denominar $h_r\,(0,t) = r \; \forall \; t > 0$ al rendimiento diario obtenible en el intervalo [0,t] y $h_{r+\alpha}\,(0,t) = r + \alpha \; \forall \; t > 0$ al mismo rendimiento si se produce un desplazamiento inesperado paralelo de los tipos de interés de cuantía α.

vi) Se supondrá que las tasas forward implícitas en la estructura temporal de tipos de interés siguen la hipótesis de las expectativas puras, esto es,

$$[1 + h\,(0,t_1)]^{t_1} = [1 + h\,(0,t_0)]^{t_0}\;[1 + h\,(t_0,t_1)]^{t_1 - t_0} \qquad t_1 > t_0$$

vii) No existen impuestos ni costes de transacción, por lo que el ajuste dinámico de la cartera cada vez que se produzca una variación en los tipos no alterará el rendimiento prometido, tal y como se puede ver en Bierwag (1991, pp. 112-118) y en Calatayud y Calero (1994). Adicionalmente ello nos permitirá circunscribir el análisis a la consideración de una sola variación instantánea en los tipos de rendimiento de mercado.

(4) Sobre la relajación de este supuesto, introduciendo estructuras temporales de tipos de interés más complejas y alteraciones estocásticas de la misma más sofisticadas, se hablará más adelante.

En estas condiciones, en el momento inicial $t = 0$, cada bono tendrá un precio (5):

$$P_{i,r} = \sum_{t=1}^{T_i} S_i(t)\,[1 + h_r(0,t)]^{-t} \qquad \forall i \in (0,n)$$

Y la cartera del inversor será:

$$V(0) = \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{t=1}^{T_i} S_i(t)\,[1 + h_r(0,T)]^{-t} = 1$$

Supongamos que se produce un desplazamiento paralelo instantáneo de la E.T.T.I. tal que $h_r(0,t) \rightarrow h_{r+\alpha}(0,t)$. El precio de cada bono se modificará, en consecuencia a

$$P_{i,(r+\alpha)} = \sum_{t=1}^{T_i} S_i(t)\,[1 + h_{r+\alpha}(0,t)]^{-t}$$

y la cartera pasará a tener un valor

$$V_\alpha(0) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{t=1}^{T_i} S_i(t)\,[1 + h_{r+\alpha}(0,T)]^{-t}$$

Al cabo de k períodos, y si no se vuelve a modificar el tipo de interés, el valor de la cartera será:

$$V_\alpha(k) = [1 + h_{r+\alpha}(0,k)]^k \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{t=1}^{T_i} S_i(t)\,[1 + h_{r+\alpha}(0,t)]^{-t}$$

El resultado de Bierwag (1991) es:

1. $V_\alpha(k)$ es estrictamente convexa en α (i.e. $\frac{\partial^2 V_\alpha(k)}{\partial \alpha^2} > 0$) lo que asegura la existencia de un mínimo.

---

(5) En un mundo con diferentes tasas impositivas según los niveles de renta de los inversores [Schaefer (1982)] o con inversores con alguna preferencia por el riesgo, esta expresión debería caracterizarse en términos de desigualdad: el precio de mercado probablemente exceda el valor teórico actual de cada bono.

2. El mínimo (i.e. el valor de α para el que $\frac{\partial V_\alpha(k)}{\partial \alpha} = 0$) verifica que $k = \sum_{i=1}^{n} u_i D_{i,\alpha}$ siendo $D_{i,\alpha}$ la duración del bono i-ésimo evaluada para una E.T.T.I. tal como $h_{r+\alpha}$ (0,t); es decir, el mínimo valor final posible se alcanza para cada α haciendo coincidir la duración calculada para ese α con el período de planificación.

3. Si calculamos D_α para $\alpha = 0$ (sea D_0) y hacemos coincidir k con tal D_0 habremos garantizado un valor final de la cartera igual a V_0 (k) o superior, lo que implica una rentabilidad de h_r (0,k) (conocida de antemano) o superior, esto es, habremos inmunizado la cartera.

El resultado de Bierwag y Khang (1979) y Prisman y Shores (1988) es:

4. Para cualquier otra distribución de los fondos iniciales $\hat{U}^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ en los bonos disponibles, que proporcione una duración de la cartera $D^* \neq D_0$, el mínimo garantizado siguiendo una estrategia inmunizadora (esto es, igualando el horizonte de planificación ahora a D^*) será menor que el mínimo obtenido en 3. En consecuencia, la estrategia definida por 3 es una estrategia maximin.

3. UNA DEMOSTRACION ALTERNATIVA

Si el valor inicial de la cartera es $V(0) = \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = 1$ y el valor final (k períodos después) tras la alteración estocástica de los tipos de interés es:

$$V_\alpha(k) = [1 + h_{r+\alpha}(0,k)]^k \, V_\alpha(0) \qquad [1]$$

se puede afirmar que se ha obtenido una rentabilidad (rentabilidad «realizada») x dada por:

$$V_\alpha(k) = (1 + x)^k \, V(0) \qquad [2]$$

Entre las ecuaciones [1] y [2], eliminando V_α (k), se obtiene, teniendo en cuenta que el factor de capitalización es $[1 + h_{r+\alpha}(0,k)] = (1 + r + \alpha)$.

$$x(\alpha,k) = (1 + r + \alpha) \, V_\alpha(0)^{1/k} - 1 \qquad [3]$$

siendo r la rentabilidad «prometida» por la inversión (esto es, la que se obtendría, en términos diarios equivalentes, caso de no producirse alteración alguna en la estructura temporal de tipos de interés) y V_α (0) el valor inicial de la cartera si se actualizasen los flujos de caja futuros al tipo de descuento $(1 + r + \alpha)^{-1}$ operativo tras un desplazamiento instantáneo inicial, de cuantía α, de la curva de rendimientos.

Una forma de describir esta función x (α,k) de rentabilidades realizadas para un valor r = cte. sería tabular matricialmente los posibles valores de la misma como los resultados («pagos») de un juego contra la naturaleza (variables de «estado», α) decidiendo sobre el número de períodos comprensivos del horizonte de planificación de la inversión (variables de «control», k), tal y como se presenta en la Figura 1.

Nos interesa estudiar el comportamiento de la función x(α,k) de rentabilidades realizadas.

Proposición 1: La rentabilidad realizada crece a medida que se extiende el horizonte de planificación, para escenarios alcistas de los tipos de interés, y decrece para escenarios bajistas.

En efecto,

$$\frac{\partial x}{\partial k} = (1 + r + \alpha)\, V_\alpha(0)^{\frac{1}{k}} ln \left[V_\alpha(0)\right]\left(-\frac{1}{k^2}\right)$$

y, basta tener en cuenta que el valor inicial de la cartera aumenta (disminuye) si disminuyen (aumentan) instantáneamente los tipos , esto es,

$$\text{para } \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad V_\alpha(0) < V(0) = 1$$

$$\text{para } \alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad V_\alpha(0) > V(0) = 1$$

para corroborar la afirmación precedente.

FIGURA 1

Estados naturaleza / V. Control	...	α < 0	...	α = 0	...	α > 0
k = 1 ... ... k = n ...	... ...			... x (α,k) ...		... ...

Corolario 1: Para $\alpha = 0$, es decir, en la hipótesis de no alteración de la E.T.T.I., la rentabilidad realizada no varía, siendo constantemente igual a r, sea cual sea el período de planificación k.

En efecto

$$\left.\frac{\partial x}{\partial k}\right]_{\alpha=0} = -\frac{1+r}{k^2} \ln V(0) = 0$$

y haciendo $\alpha = 0$ en [3], queda $x\ (\alpha,k)]_{\alpha=0} = r$

Proposición 2: La rentabilidad realizada $x\ (\alpha,k)$ presenta un valor mínimo para algún α en cada horizonte de planificación k, esto es, $x\ (\alpha,k)$ es una función convexa en k.

Para la demostración de esta proposición, necesitamos algunas consideraciones previas:

De un lado, observar que a partir de la definición de Hicks de duración [Hicks (1939, pp. 185-188)], equivalente a la definición convencional de Macaulay (como se demuestra, p. ej., en Bierwag [1991, p. 85]), para una tasa de actualización constante $r + \alpha$, se verifica

$$\frac{\partial V_\alpha(0)}{\partial \alpha} = -D_\alpha \frac{V_\alpha(0)}{1+r+\alpha} \qquad [4]$$

siendo:

$$D_\alpha = \frac{1}{V_\alpha(0)} \sum_{t=1}^{n} t S_t (1+r+\alpha)^{-t}$$

Por otro lado, y derivando esta última expresión respecto α

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{D_\alpha^2 - D_{\alpha,2}}{1+r+\alpha} \qquad [5]$$

siendo $D_{\alpha,2}$ el segundo componente del vector J-dimensional de duración introducido por Chambers, Carleton, Willard y McEnally (1988) y utilizado por Prisman y Shores (1988) entre otros, definido por:

$$D_{\alpha,J} = \frac{1}{V_\alpha(0)} \sum_{t=1}^{n} t^J S_t (1+r+\alpha)^{-t} \quad \forall J \geq 1$$

es decir, una media ponderada (con la misma metodología que en la duración de Macaulay) de las potencias de t. Para $J = 1$ tenemos la definición clásica de duración.

Además, convendrá tener en cuenta más adelante que (de [5])

$$D_\alpha^2 - D_{\alpha,2} < 0 \qquad [6]$$

dado el carácter decreciente de la duración con las tasas de rendimiento, tal y como se puede ver en Bierwag (1991, p. 80).

A partir de estas consideraciones, la demostración de la proposición 2 es inmediata, ya que

$$\frac{\partial x(\alpha,k)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\kappa}\left[V_\alpha(0)\right]^{\frac{1}{k}}(k-D_\alpha) \qquad [7]$$

es decir, en $k = D_\alpha$ existe un punto crítico para cada valor de k (en particular, si $\alpha = 0$, tal extremo se producirá para $k = D_0$, igualando el horizonte de planificación a la duración de la cartera).

Por otro lado

$$\frac{\partial^2 x(\alpha,k)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\kappa^2}(1+r+\alpha)^{-1} V_\alpha(0)^{\frac{1}{k}}\theta(k)$$

siendo $\theta(k) = -k\,(D_\alpha^2 - D_{\alpha,2}) - D_\alpha\,(k - D_\alpha)$, cuyo signo será positivo siempre que $k > \alpha$ o que $D_{\alpha,2} - D_\alpha^2 > D_\alpha$, condición esta última que se debe cumplir con generalidad, ya que al ser $x\,(\alpha, k)$ una transformación monótona de $V_\alpha\,(k)$ sus segundas derivadas han de comportarse similarmente y operando en [1]

$$\frac{\partial^2 V_\alpha(k)}{\partial \alpha^2} = V_\alpha(0)\,(1+r+\alpha)^{k-2}\left[(k-D_\alpha)\,(k-1-D_\alpha) - (D_\alpha^2 - D_{\alpha,2})\right] .$$

expresión que tiene asegurado su signo positivo, ya que al ser $(k - D_\alpha)$ y $(k - D_\alpha - 1)$ números consecutivos nunca podrán tener, simultáneamente, signos opuestos.

Por tanto $x\,(\alpha,k)$ es una función convexa de α, con un valor mínimo en $k = D_\alpha$, para todo k, tal y como queríamos demostrar.

Definición 1: Denominaremos «ruta de expansión de la estrategia inmunizadora» al conjunto de pares $\{(\alpha,k) \mid k = D_\alpha\}$, donde se obtienen las mínimas rentabilidades realizadas para cada horizonte de planificación.

Podemos caracterizar la «ubicación» de esta ruta de expansión orientada de SW a NE en la matriz de pagos presentada en la Figura 1, a través de la siguiente

Proposición 3: La ruta de expansión de la estrategia inmunizadora $\{(\alpha,k) \mid k = D_\alpha\}$ es una función $k = k(\alpha)$ decreciente.

En efecto, $k = D_\alpha$ es

$$k=\frac{1}{V_\alpha(0)}\sum_{t=1}^{n} tS_t(1+r+\alpha)^{-t}$$

y

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha}=\frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha}=\frac{D_\alpha^2-D_{\alpha,2}}{1+r+\alpha}<0$$

como vimos anteriormente.

Demostraremos ahora que, efectivamente, el mejor resultado posible obtenible sobre ese «locus» de pares (α,k) es, precisamente, el que se obtiene en $(0,D_0)$, esto es, la estrategia inmunizadora asegura el mejor de entre los peores resultados posibles para cada decisión de planificación temporal de la inversión.

LEMA 1: La rentabilidad realizada en $(0,D_0)$ es máxima a lo largo de la ruta de expansión de la estrategia inmunizadora, es decir, igualar el horizonte de planificación k a la duración de la cartera es una estrategia maximin.

En efecto, sustituyendo $k = D_\alpha$ en la expresión [3], proporciona la rentabilidad realizada $x^*[\alpha,k(\alpha)]$ a lo largo de la ruta de expansión.

$$x^*[\alpha,k(\alpha)]=(1+r+\alpha)\,V_\alpha(0)^{\frac{1}{D_\alpha}}-1 \qquad [8]$$

y derivando

$$\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}=V_\alpha(0)^{\frac{1}{D_\alpha}}\left[\frac{D_{\alpha,2}-D_\alpha^2}{D_\alpha^2}\right] \ln V_\alpha(0)$$

expresión que se anula para $\alpha = 0$ $(V_\alpha(0)]_{\alpha=0} = 1 \Rightarrow \ln V_\alpha(0)]_{\alpha=0} = 0)$, y que (dado que $D_{\alpha,2} - D_\alpha^2 > 0$, como vimos anteriormente) cambia de signo en $\alpha = 0$, al ser, como también se ha visto, $V_\alpha(0) > 1$ para $\alpha < 0$ y $V_\alpha(0) < 1$ para $\alpha > 0$, por lo que, si la pendiente a $x^*[\alpha, k(\alpha)]$ pasa de positiva a negativa, en un entorno de $\alpha = 0$, en $\alpha = 0$ existe un máximo, como queríamos demostrar.

4. CONCLUSIONES

En este papel, tras caracterizar la rentabilidad realizada al final del período planificador por una inversión en bonos de renta fija, con cupón explícito y sin riesgo de insolvencia, como una función de la longitud de tal período de planificación y del eventual shock aditivo instantáneo inicial sobre la estructura de tipos de interés, se ha demostrado que la estrategia consistente en igualar la duración de la cartera inicial a la longitud del período planificador no sólo inmuniza (en el sentido de que asegura una rentabilidad final mayor o igual a la prometida inicialmente) sino que, además, proporciona el mejor resultado posible de entre los más desfavorables para cada horizonte de planificación alternativo.

Inmunizar una cartera, pues, asegura un punto de ensilladura (un resultado maximin) en la matriz de pagos de un juego contra la naturaleza, donde los diferentes estados de la misma son los diferentes escenarios de tipos de interés y donde la variable de control del juego a disposición del agente decisor es la longitud del horizonte de planificación de su inversión.

Cabría averiguar si el presente resultado se puede extender para procesos estocásticos generadores de la estructura temporal de tipos de interés más sofisticados, en particular procesos que permitiesen curvas de rendimientos no «planas» y con desplazamientos de las mismas no sólo paralelos sino con posibles cambios de pendiente, en definitiva, procesos del tipo

$$h_{\alpha}(0,t) = r(t) - \sum_{j=1}^{J} \alpha_{j-1} t^{j-1}$$

donde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})$ es un vector de coeficientes aleatorios que, según el trabajo empírico de Chambers, Carleton, Willard y Waldman (1984), con $J = 6$ es capaz de capturar con bastante aproximación la estructura temporal observada de los tipos de interés.

REFERENCIAS

BIERWAG, G. O. (1991): *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de interés*, Madrid, Alianza Economía y Finanzas.

BIERWAG, G. O.; KAUFMAN, G., y TOEVS, A. L. (1982): «Single factor duration models in a discrete general equilibrium framework», *The Journal of Finance*, XXXVII, núm. 2, mayo, pp. 325-338.

BIERWAG, G. O., y KHANG, C. (1979): «An immunization strategy is a minimax strategy», *The Journal of Finance*, XXXIV, núm. 2, mayo, pp. 389-399.

CALATAYUD, F. P., y CALERO, F. (1994): «Duración y estrategias de inmunización de carteras de renta fija», *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, núm. 78, 1.er trimestre.

CHAMBERS, D.; CARLETON, R.; WILLARD, T., y MCENALLY, R. W. (1988): «Immunizing default-free bonds with a duration vector», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, pp. 89-104.

CHAMBERS, D.; CARLETON, R.; WILLARD, T., y WALDMAN, D. W. (1984): «A new approach to estimation of the term structure of interest rates», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, pp. 233-352.

HICKS, J. R. (1939): *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford University Press.

PRISMAN, E. Z., y SHORES, M. R. (1988): «Duration measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization», *Journal of Banking and Finance*, 12, pp. 493-504.

SCHAEFER, S. M. (1982): «Taxes and security market equilibrium», in SHARP, W. F., and COOTNER, C. M., eds., *Financial Economics: Essays in honour of Paul H. Cootner*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J.