

Julio J.  
Lucía López

*Departamento  
de Economía Financiera  
y Matemática.  
Universidad de Valencia*

# EL MODELO DE BLACK Y LA VALORACION DE LAS OPCIONES SOBRE EL CONTRATO DE FUTURO MIBOR-90 (\*)

*Resumen.—Abstract.—1. Introducción.—2. El modelo de Black (1976) aplicado al caso del depósito interbancario.—3. Alternativa a la fórmula de Black tomando el tipo de interés R como subyacente.—4. Consecuencias para la valoración y la negociación.—5. Conclusiones y extensiones.—Referencias bibliográficas.*

## RESUMEN

UNA de las modificaciones que más frecuentemente se realiza al modelo de Black (1976) para su aplicación al caso de las opciones sobre el contrato Eurodollar, consiste en considerar que, en lugar del precio de futuro, es el tipo de interés futuro implícitamente negociado la variable subyacente que se distribuye logarítmico-normal. Las fórmulas que se obtienen están muy próximas a las de Black pero no son iguales. Utilizar el tipo de interés futuro como variable subyacente tiene consecuencias en la valoración y negociación subsiguientes. La diferencia entre las dos alternativas es mayor cuanto más elevada es la volatilidad del mercado. Aquí se analiza este cambio de hipótesis y sus consecuencias para ayudar a que los operadores españoles puedan decidir

---

(\*) Deseo expresar mi agradecimiento al profesor Vicente Meneu Ferrer por sus valiosos comentarios sobre los borradores previos. Lo escrito es exclusiva responsabilidad del autor.

sobre la conveniencia de su aplicación al caso de la opción sobre el contrato de futuro Mibor-90.

**PALABRAS CLAVE:** valoración de opciones; modelo de Black; Eurodollar; contrato Mibor-90; distribución logarítmico-normal.

## ABSTRACT

One of the most frequent modifications made to the Black model (1976) in order to be used in the valuation of Eurodollar futures options, consists of considering that the «future interest rate», instead of the futures price, is lognormally distributed. The formulas that can be obtained are very similar to the Black's ones, but they are not quite the same. Using the «future interest rate» as the underlying variable has some consequences in the subsequent valuation and trading. The higher the market volatility, the bigger the difference between both alternatives. We analyse this hypothesis change in the model and its consequences, so that Spanish traders can decide about its application to the Mibor-90 futures options.

**KEYWORDS:** option valuation; Black model; Eurodollar contract; Mibor-90 futures options; lognormal distribution.

## 1. INTRODUCCION

Las limitaciones del modelo de Black (1976) en la valoración y negociación de las opciones sobre contratos de futuro son conocidas. Estas se derivan de las hipótesis inexactas en que se basa y de los factores que afectan a los precios y negociación reales y que no son consideradas por el modelo. Algunas están presentes cualquiera que sea el contrato de futuro subyacente considerado. Por ejemplo, que sea un modelo válido sólo para valorar opciones europeas, cuando la mayoría de las opciones sobre futuros negociadas en el mundo son americanas, o que la distribución de los cambios en los precios de futuro sea normal, cuando la evidencia empírica parece mostrar que es leptocúrtica [entre otros puede verse: Helms y Martell (1985) y Venkateswaran *et al.* (1993)]. Otras tienen mucha mayor importancia cuando se trata de valorar opciones sobre futuros derivados de los tipos de interés, como por ejemplo, que el tipo de interés sin riesgo a corto plazo se considere constante durante la vida de la opción.

No obstante, a pesar de las limitaciones apuntadas, el modelo de Black continúa siendo utilizado ampliamente por los operadores de diferentes países y por las propias cámaras de compensación de los mercados para el cálculo de garantías, como así sucede en el caso español. De hecho, es considerado por los operadores experimentados como una guía valiosa en la negociación y una herramienta muy útil en el análisis de los riesgos [Bobin (1990) p. 25, y Natenberg (1988) p. 32].

Evidentemente, para aprovechar las utilidades del modelo y tener éxito en el uso del mismo es necesario conocer sus limitaciones o inexactitudes y «corregirlas» de alguna manera. Muchos esfuerzos han dedicado ya los académicos a perfeccionarlo: modelos específicos para opciones americanas; modelos con otros procesos y distribuciones para el comportamiento del subyacente, con una o varias variables estocásticas, o modelos con los tipos de interés estocásticos. Sin embargo, la falta de unanimidad y consenso en las ventajas y virtudes de las distintas propuestas o modelos, la complejidad matemática y de cálculo de algunos de ellos, y las dificultades para comprender las sofisticaciones de otros, sobre el papel más convenientes y completos, hacen difícil y lenta su aceptación con carácter general por los mercados.

Los profesionales, con la visión práctica que necesariamente les distingue de los académicos, han optado mientras tanto por seguir utilizando modelos «imperfectos» como el de Black, aunque a la vez se sirvan de otros si consideran que les pueden ser de ayuda (por ejemplo, modelos para opciones americanas), pero realizando correcciones o ajustes *ad-hoc* que permitan mejorar la utilidad del mismo. Entre estos ajustes está la asignación de una mayor volatilidad (implica corrección en el valor de la opción) a las opciones que estén lejos de la paridad para adaptarlo a la leptocurticidad observada [véase Natenberg (1988), pp. 307-309]; o, en el caso de las opciones sobre futuros sobre Treasury bonds, incrementar la volatilidad por un factor relacionado con la correlación entre el tipo de interés a corto y a largo plazo [véase Fitzgerald (1987), p. 187] (1). Algunas de estas correcciones son tan populares que son incorporadas en los propios programas informáticos comercializados para la valoración y negociación de opciones.

Este escrito analiza uno de los ajustes más comunes que se hace al modelo de Black en el caso de su aplicación a las opciones sobre el contrato de futuro Eurodollar Deposit, y que consiste en tomar como subya-

---

(1) Véase también Jarrow y Wiggings (1989).

cente el tipo de interés implícito en el precio del contrato de futuro en lugar de tomar el precio del contrato, por considerarlo más adecuado y acorde con la realidad.

El contrato de futuro Eurodollar es un contrato sobre tipo de interés a corto plazo, en concreto, el tipo de interés Libor de un depósito interbancario de 3 meses. Este contrato se negocia con éxito en el Chicago Mercantile Exchange (CME) y el London International Financial Futures Exchange (Liffe) y, con menor importancia, en el Singapore International Monetary Exchange (conectado a CME). El precio de un contrato de futuro Eurodollar se establece sobre la base de un índice, de manera que  $F=100-R$ , siendo  $F$  el precio de futuro y  $R$  el tipo de interés Libor para 3 meses (los contratos de futuro sobre T-bill del CME funcionan sobre el mismo principio —véase Hull (1989), pp. 52 y ss.—). Las opciones sobre este contrato, por su parte, tienen diferentes características según el mercado en que se negocien. En las opciones sobre el futuro Eurodollar del CME el comprador de la opción tiene que pagar el importe total de la prima a la compra y no se le solicita ningún otro tipo de depósito, mientras que el vendedor de la opción debe hacer frente a unos depósitos de garantía. En el caso del LIFFE está establecido el conocido como «sistema de depósitos de estilo futuros» (*futures style margining system*), de manera que tanto el comprador como el vendedor de la opción deben hacer frente a unos depósitos de garantía iniciales en función del riesgo estimado de la posición tomada (este depósito inicial puede variar durante la vida de la opción), practicando después la liquidación diaria de pérdidas y ganancias (es *marked to market*) como si se tratase de un contrato de futuro. Este sistema es extremadamente eficiente y permite posiciones elevadas y complejas en futuros y opciones con el mínimo coste (2). La forma de pago de la prima tiene consecuencias en el procedimiento de liquidación al ejercer, que es necesariamente distinto en uno u otro caso [para más detalles véase Fitzgerald (1987), pp. 23-28].

Los contratos españoles análogos a los comentados son el contrato de futuro sobre depósito interbancario Mibor-90 y la opción sobre el mismo. El sistema de cotización del precio de futuro es totalmente semejante al caso del contrato Eurodollar, y la prima de la opción correspondiente es pagada de una sola vez, al contratar, por el comprador de la misma (3).

---

(2) Este sistema ha sido propuesto y proyectado por varias bolsas americanas, sin que hasta la fecha el autor tenga constancia de su aprobación o desarrollo.

(3) Existen otros contratos de este tipo en otros mercados, como el contrato PIBOR del Marché à Terme International de France (MATIF).

El objeto de este escrito es establecer las ventajas teóricas del ajuste concreto comentado y las consecuencias teóricas y prácticas del mismo en la valoración, para que el operador español pueda decidir la conveniencia o no de su aplicación al caso del Mibor-90.

## 2. EL MODELO DE BLACK (1976) APLICADO AL CASO DEL DEPOSITO INTERBANCARIO

El modelo de Black (1976) fue inicialmente formulado para valorar opciones europeas sobre contratos *forward*; sin embargo, si se supone constante el tipo de interés sin riesgo durante la vida de la opción sobre futuro, como hace el modelo, éste también es aplicable a la valoración de opciones sobre futuros europeas (4).

El modelo de Black (1976) se basa en las siguientes hipótesis (5):

(H1) Mercado sin fricciones: no existen costes de transacción, incluyendo *bid-ask spreads*, o de información; no existen impuestos; es posible realizar compras y ventas en descubierto («ventas a corto») sin penalización alguna. Los instrumentos son perfectamente divisibles y se negocian de forma continua.

(H2) Los mercados están libres de oportunidades de arbitraje sin riesgo. No se formula hipótesis alguna sobre las preferencias de los inversores ni, por tanto, de su actitud ante el riesgo.

(H3) El tipo de interés a corto plazo sin riesgo es constante a lo largo del tiempo.

(H4) El cambio relativo instantáneo del precio de futuro,  $F$ , está descrito por la ecuación diferencial estocástica siguiente (proceso browniano geométrico):

$$dF / F = \mu dt + \sigma dz \quad [1]$$

donde  $\mu$  es la variación relativa instantánea esperada del precio de futuro,  $\sigma$  es la desviación típica de la variación relativa instantánea en el precio de futuro, y  $dz$  es un proceso estándar de Wiener.

---

(4) La diferencia fundamental entre un contrato *forward* y un contrato de futuro es que el primero es liquidado enteramente a vencimiento, es decir, no genera ningún pago hasta la fecha de vencimiento, y su valor puede ser distinto de cero durante su vida, mientras que en el segundo se realiza la liquidación diaria de pérdidas y ganancias y el valor del mismo se iguala a cero al final de cada día.

(5) El análisis de las mismas para el caso de la aplicación del modelo en las opciones sobre contratos de futuro sobre tipos de interés puede verse en Lucía López (1993).

(H5) Las opciones son europeas y la prima se paga de una sola vez.

A través de la composición de una cartera sin riesgo instantáneamente consistente en una posición en las opciones sobre futuros y una posición compensadora en el contrato de futuro subyacente, y usando argumentos de arbitraje, es posible llegar a una ecuación en derivadas parciales sin componente estocástica a resolver teniendo en cuenta las condiciones límite o de contorno apropiadas [véase Black (1976) p. 177].

La fórmula del valor teórico de la opción de compra a la que se llega es (6):

$$C = C(F, \tau; E) = e^{-r\tau} [F \cdot N(d_1) - E \cdot N(d_2)] \quad [2]$$

Donde:

$N(d)$  es la función de probabilidad acumulada de una variable normal estándar.

$$d_1 = \frac{\ln(F/E) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$F$  es el precio de futuro actual

$E$  es el precio de ejercicio de la opción sobre futuro

$r$  es el tipo de interés instantáneo sin riesgo (anual)

$\tau$  es el tiempo hasta la expiración de la opción (en años)

$\sigma$  se denomina *volatilidad* del precio de futuro y es la desviación típica de la variación relativa instantánea (compuesta continua) en el precio de futuro, por unidad de tiempo, esto es,  $\sigma = [\text{var}(\ln(F_{t+\Delta}/F_t)) / \Delta]^{1/2}$ . Suele expresarse anualizada y en tanto por uno.

Cambiando las condiciones de contorno a aplicar a la ecuación en derivadas parciales comentada, se llega al valor de la correspondiente opción de venta:

$$P = P(F, \tau; E) = e^{-r\tau} [E \cdot N(-d_2) - F \cdot N(-d_1)] \quad [3]$$

donde se mantiene la notación anterior.

---

(6) También puede demostrarse a través del modelo de Black y Scholes (1973); como límite del modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979) adaptado al caso de las opciones sobre futuros, o utilizando el «argumento de valoración riesgo neutral» o «valoración bajo indiferencia al riesgo» [Hull (1989), caps. 4 y 5].

La hipótesis (H4) implica que el precio de futuro,  $F_T$ , en una fecha futura,  $T$ , se distribuye logarítmico-normal, ya que su logaritmo neperiano se distribuye normal:

$$\ln F_T \sim N \left[ \ln F + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T-t), \sigma \sqrt{T-t} \right] \quad [4]$$

donde  $N(m, d)$  representa una distribución normal de media  $m$  y desviación típica  $d$ , y  $t$  es la fecha actual (7). Es inmediato comprobar que también se cumple:

$$\ln \frac{F_T}{F} \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T-t), \sigma \sqrt{T-t} \right] \quad [5]$$

*Características de la distribución logarítmico-normal para  $F_T$  e implicaciones en la distribución de  $R_T$  (8):*

Respecto a la distribución logarítmico-normal de  $F_T$ , pueden destacarse las siguientes propiedades:

a) La variable puede tomar valores entre cero e infinito:  $0 < F_T < \infty$ . Es una característica deseable que el precio de futuro no pueda tomar valores negativos. En el caso que nos ocupa un precio de futuro negativo implicaría un tipo de interés implícito superior al 100 por 100. Recuérdese que inicialmente el proceso asumido para el subyacente de la opción y la distribución del precio del mismo consecuencia de aquél fueron utilizados por Black y Scholes (1973) cuando el subyacente es una acción, y también se considera adecuado que el valor de la acción no pueda tomar valores negativos (9).

(7) La demostración puede verse, por ejemplo, en Hull (1989) capítulo 4.

(8) Para los detalles de la distribución logarítmico-normal puede consultarse el libro de Aitchison y Brown (1969).

(9) La idea de que el precio más bajo al que puede negociarse un bien es cero no es siempre enteramente cierta. Vince (1992), p. 124, por ejemplo, recuerda que «durante el

b) La expresión (4) equivale a que el precio de futuro  $F_T$  sigue una distribución logarítmico-normal con las siguientes esperanza y varianza, consecuencia inmediata de las propiedades estadísticas de este tipo de distribuciones:

$$\begin{aligned} E(F_T) &= F \cdot e^{\mu(T-t)} \\ \text{var}(F_T) &= F^2 e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \end{aligned} \quad [6]$$

c) La distribución log-normal es leptocúrtica (apuntada respecto a la distribución normal). Puede probarse que la leptocurticidad es mayor conforme aumenta la varianza de  $\ln F_T$ . Además, la distribución lognormal tiene un coeficiente de asimetría positivo, por lo que la distribución está sesgada hacia valores altos de la variable, y la media, moda y mediana son todas distintas (en concreto, se cumple: moda < mediana < media). La asimetría también aumenta cuanto mayor es la varianza de  $\ln F_T$ .

Estas características tienen su repercusión en el tipo de interés negociado. Efectivamente, dado que el tipo de interés implícitamente negociado es  $R_T = 100 - F_T$ ,  $R_T$  es una variable que tiene una cota superior en 100 y está restringida al rango  $-\infty < R_T < 100$ . Como la variable  $F_T = 100 - R_T$  es log-normal con su media y varianza dadas por la expresión (6), la función de densidad de la distribución de  $R_T$  es la «imagen en un espejo» respecto al valor 100 de la función de densidad de la variable:  $Y = 100 + F_T = 200 - R_T$  (10).

La distribución de  $R_T$  es, por consiguiente, asimétrica negativa y podemos llamarla «log-normal negativa» o «distribución log-normal sesgada

---

*crack* de la bolsa de 1929 y el subsiguiente mercado bajista, a los accionistas de muchos bancos quebrados se les hizo responsables ante los depositantes de esos bancos. Las personas que poseían acciones de tales bancos no solamente perdieron completamente su inversión, sino que adquirieron responsabilidad más allá de la cuantía de su inversión». Que pueda darse o no en la realidad la posibilidad de precios negativos depende, en definitiva, del bien en cuestión y de cómo se exprese el precio. Por otro lado, lo que realmente interesa es que, normalmente, el precio no baje de cero.

(10) La variable  $Y = 100 + F_T$  está restringida al rango  $100 < Y < \infty$ , y corresponde a lo que Aitchison y Brown (1969), p. 14, denominan una distribución lognormal de tres parámetros, siendo 100 este tercer parámetro también llamado «umbral» de la distribución. La variable  $Y$  constituye un simple desplazamiento de  $F_T$ , de manera que la función de densidad de  $Y$  es la de la distribución  $F_T$  desplazada en 100, las medidas de posición son, por lo tanto, las de  $F_T$  incrementadas en 100. Los momentos respecto a la media y, por consiguiente, los coeficientes de curtosis y asimetría de  $Y$  son iguales a los de  $F_T$ .



negativamente» (*negatively-skew lognormal distribution*). Dado que  $R_T = 100 - F_T$  y por las propiedades de la esperanza matemática puede demostrarse que:

$$\begin{aligned} E(R_T) &= 100 - E(F_T) \\ \text{var}(R_T) &= \text{var}(F_T) \end{aligned} \quad [7]$$

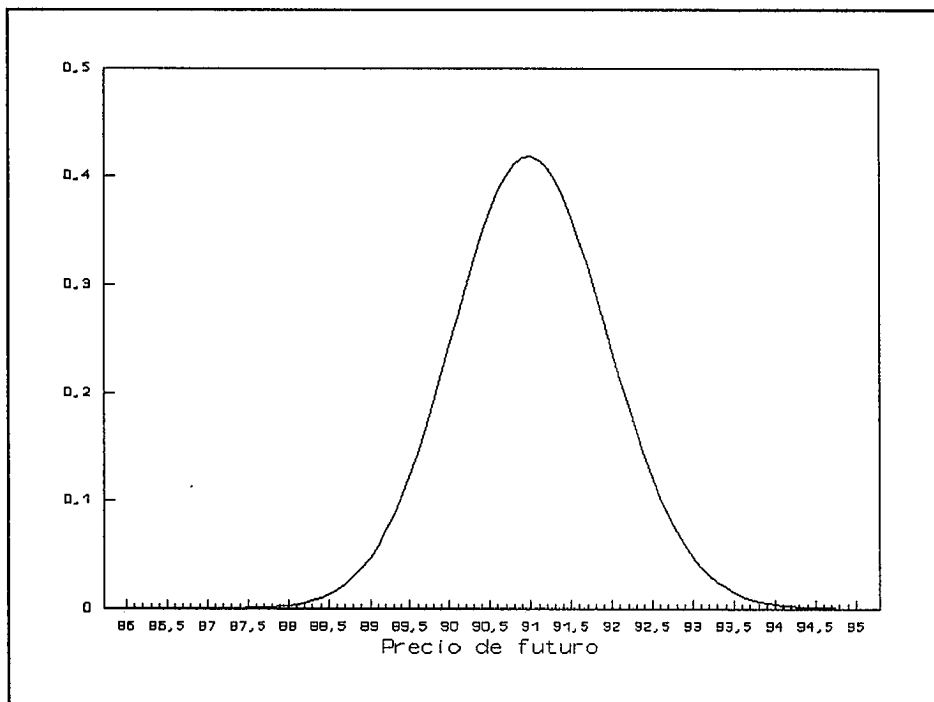
El coeficiente de asimetría de  $R_T$  es el de  $F_T$  cambiado de signo y el coeficiente de curtosis no cambia. La moda y la mediana de  $R_T$  son 100 menos la moda y 100 menos la mediana de  $F_T$ , respectivamente.

Por las características comentadas de  $F_T$  y  $R_T$  podría darse el caso de que el precio de futuro alcanzase un valor superior a 100 y, consecuentemente, se estuviesen negociando tipos de interés negativos para el depósito interbancario a 3 meses. En la práctica, no obstante, la probabilidad de que ocurra este hecho estará condicionada por el valor que tomen la media y la varianza de  $F_T$ . Unos valores realistas de la media y volatilidad del precio de futuro son 91 y 1,48 por 100 anual (o 0,0148), respectivamente. Por la expresión (4), la desviación típica de  $\ln F_{0,5}$  es 0,0105, siendo  $F_{0,5}$  el precio de futuro dentro de medio año. Por la relación existente entre las esperanzas matemáticas de una variable aleatoria lognormal y la correspondiente variable aleatoria normal, la esperanza de  $\ln F_{0,5}$  puede probarse que es 4,5108. Hay un 95,4 por 100 de probabilidad de que una variable con una distribución normal tome un valor comprendido entre dos desviaciones típicas de su media, por lo tanto, con una probabilidad del 95,4 por 100:  $4,4898 < \ln F_{0,5} < 4,5318$ , o también:  $89,1058 < F_{0,5} < 92,9242$ . Es decir, con un precio medio de  $F_{0,5} = 91$  y una volatilidad de 1,48 por 100 anual, con el 95,4 por 100 de probabilidad,  $89,1058 < F_{0,5} < 92,9242$ . El Gráfico 1.a recoge la función de densidad de  $F_{0,5}$  para este ejemplo. La correspondiente función de densidad para la variable  $R_{0,5}$  está representada en el Gráfico 1.b.

La asimetría positiva de la función de densidad de  $F_{0,5}$  (Gráfico 1.a) y la negativa de  $R_{0,5}$  (Gráfico 1.b) no es perceptible debido a la baja varianza de  $\ln F_{0,5}$ . Ahora bien, la asimetría se notaría si fuese mayor la varianza de  $\ln F_T$ . Esto se lograría si la volatilidad fuese más alta o considerando un mayor plazo (mayor valor de  $T-t$ ). Es importante notar que estos dos mismos factores junto con una media de  $F_T$  más alta podrían dar lugar, en la práctica, a que el modelo admita la posibilidad de que se negocien precios por encima de 100 (tipos de interés negativos).

Evidentemente, que el modelo admita la posibilidad de que puedan negociarse tipos de interés negativos es un inconveniente del mismo. El contrato de futuro sobre Mibor-90 (también el Eurodollar) se liquida por diferencias: se obtiene una cuantía a liquidar en metálico basada en un

GRAFICO 1.a  
DISTRIBUCION DEL PRECIO DE FUTURO

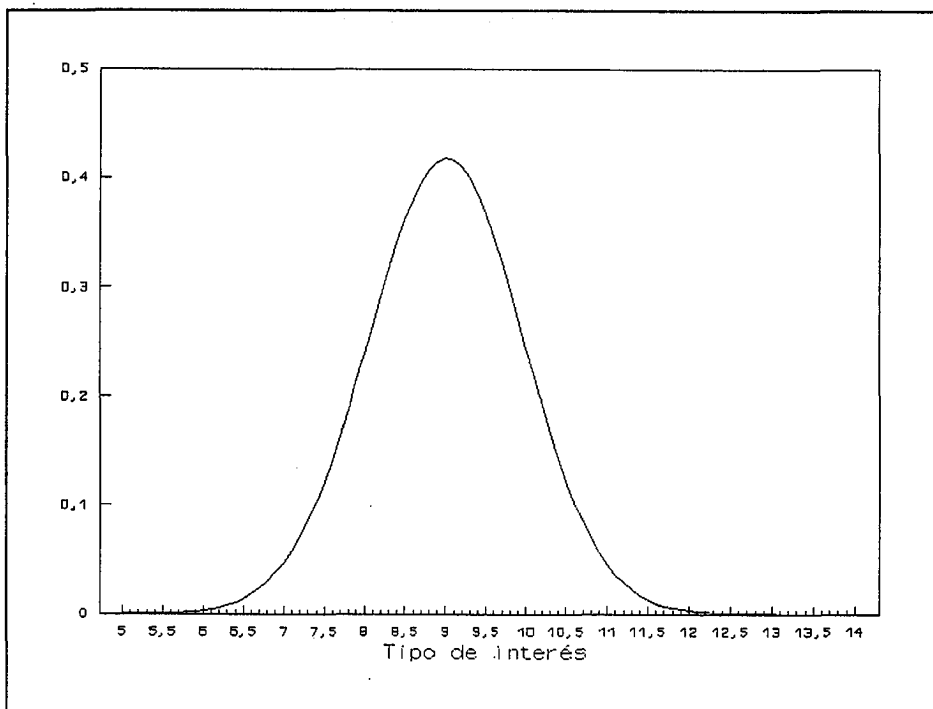


precio final de futuro al vencimiento determinado a partir del mercado de contado. Esta convergencia del tipo de futuro implícito y el tipo de contado es lo que permite, a quien acude a cubrirse, fijar el tipo de interés del depósito por anticipado. Un individuo que utilizase este tipo de contrato de futuro para garantizarse el tipo de interés como prestamista, no tomaría parte en el mercado a un precio que implicase un tipo de interés negativo.

### 3. ALTERNATIVA A LA FORMULA DE BLACK TOMANDO EL TIPO DE INTERÉS R COMO SUBYACENTE

Una modificación que frecuentemente se realiza al modelo de Black para aplicarlo al caso de las opciones sobre contrato Eurodollar puede

GRÁFICO 1.b  
DISTRIBUCION DEL TIPO DE INTERES



considerarse que constituye, más bien, una alternativa a dicho modelo, aunque directamente derivada de éste. En efecto, la alternativa consiste en cambiar la hipótesis referente al proceso estocástico seguido por el precio de futuro, a saber: se supone que el tipo de interés futuro implícito en el precio de futuro es la variable que sigue el proceso browniano geométrico, manteniéndose iguales el resto de las hipótesis del modelo de Black. De esta forma se obtienen unas expresiones muy próximas a las de Black pero que proporcionan distintos resultados, con las consiguientes repercusiones en la valoración y negociación. Se supone que:

$$dR = \mu_2 R dt + \sigma_2 R dz \quad [8]$$

donde  $\mu_2$  y  $\tau_2$  tienen el mismo significado que sus parámetros equivalentes en la ecuación (1), si bien referidos ahora al tipo de interés futuro im-

plícito. Aplicando el lema de Ito a la expresión (8) puede obtenerse fácilmente el proceso seguido por  $F = 100 - R$ :

$$\begin{aligned} dF &= -dR = -\mu_2 R dt - \sigma_2 R dz \\ &= -\mu_2 (100 - F) dt - \sigma_2 (100 - F) dz \\ &= (\mu_2 F - \mu_2 100) dt + (\sigma_2 F - \sigma_2 100) dz \end{aligned} \quad [9]$$

que es un proceso distinto al descrito por la ecuación (1).

De forma paralela a cómo se hizo en la sección anterior, pueden establecerse las consecuencias del proceso descrito por la ecuación (8). El tipo futuro implícito en una fecha futura  $T$  se distribuye normal:

$$\ln R_T \sim N \left[ \ln R + \left( \mu_T - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \cdot (T-t), \sigma_2 \sqrt{T-t} \right] \quad [10]$$

donde se sigue la notación usual; en otras palabras,  $R_T$  sigue una distribución logarítmico-normal.

La distribución de  $R_T$  tiene las siguientes características destacables:

a) La variable aleatoria  $R_T$  tiene como esperanza matemática y varianza las siguientes:

$$\begin{aligned} E(R_T) &= R \cdot e^{\mu_2(T-t)} \\ \text{var}(R_T) &= R^2 e^{2\mu_2(T-t)} (e^{\sigma_2^2(T-t)} - 1) \end{aligned} \quad [11]$$

b) La variable aleatoria  $R_T$  está limitada a tomar valores entre cero e infinito:  $0 < R_T < \infty$ , es decir, no puede tomar valores negativos.

c) La distribución de  $R_T$  es leptocúrtica y tiene asimetría positiva. Ambas medidas de desviación de la normalidad aumentan al aumentar la varianza de  $\ln R_T$ . La asimetría positiva significa que la distribución está sesgada hacia altos valores de la variable  $R_T$ .

Estas características conllevan que la variable aleatoria  $F_T = 100 - R_T$  está restringida al rango  $-\infty < F_T < 100$ , y tiene una distribución asimétrica negativa, en concreto, el coeficiente de asimetría de  $F_T$  tiene el mismo valor absoluto que el de  $R_T$ . Por lo tanto,  $F_T$  puede tomar valores negativos, con una probabilidad determinada por su media y su varianza. Puede demostrarse a partir de la expresión (10) que:

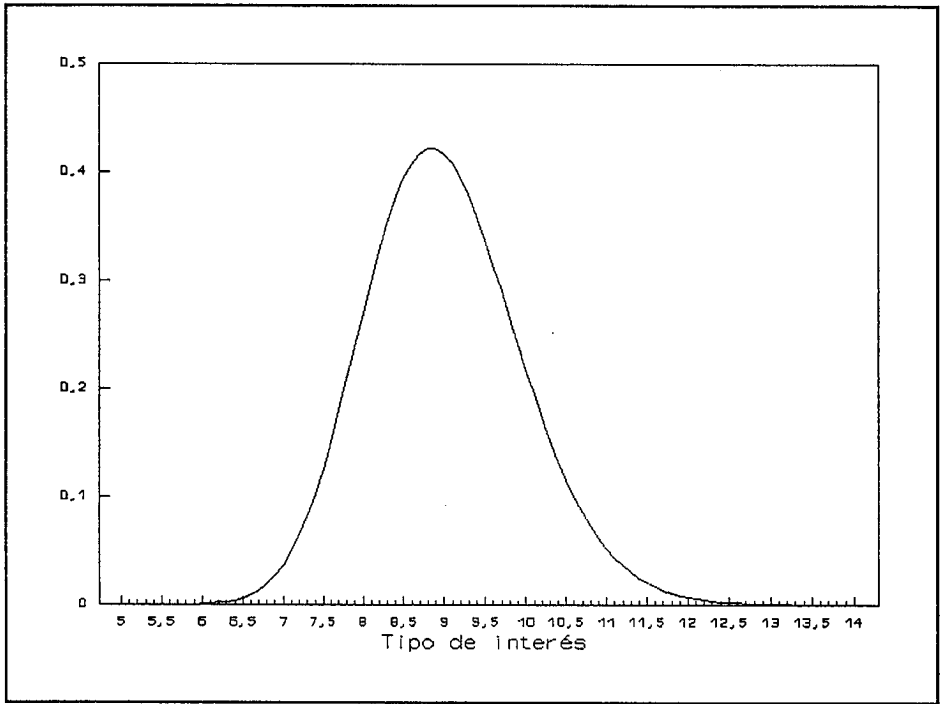
$$\begin{aligned} E(F_T) &= 100 - E(R_T) \\ \text{var}(F_T) &= \text{var}(R_T) \end{aligned} \quad [12]$$

En los Gráficos 2.a y 2.b se recogen las funciones de densidad de  $R_{0,5}$  y  $F_{0,5}$  cuando se utiliza la escala  $R$ , para los valores correspondientes al ejemplo de los Gráficos 1.a y 1.b.

Se ha tomado una media de  $R_{0,5}$  igual a 9 y una volatilidad del tipo implícito del 15 por 100 anual (o 0,15) (11). Con estos valores la desviación típica de  $\ln R_{0,5}$  es 0,1061 y la media de  $\ln R_{0,5}$  es 2,1916. Con una probabilidad del 95,4 por 100:  $1,9795 < \ln R_{0,5} < 2,4037$ , o también:  $7,2389 < R_{0,5} < 11,0644$ .

La asimetría positiva de  $R_{0,5}$  (implica que la probabilidad de subidas de tipos de interés es mayor que la probabilidad de caídas de los tipos de

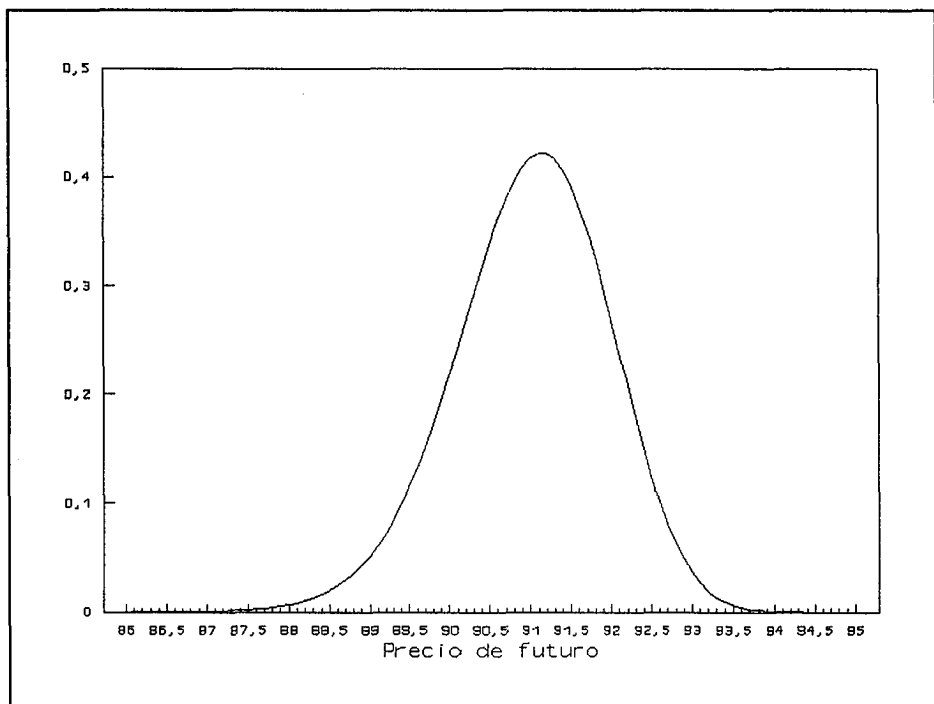
GRÁFICO 2.a  
DISTRIBUCION DEL TIPO DE INTERES



---

(11) Una volatilidad del 15 por 100 para  $R$  equivale aproximadamente a una volatilidad para  $F$  de 1,48 por 100, ya que un tipo de interés igual a 9 es el 9,89 por 100 de un precio de futuro de 91.

GRÁFICO 2.b  
DISTRIBUCION DEL PRECIO DE FUTURO



interés) y la negativa de  $F_{0,5}$  sí son apreciables en este caso debido a la mayor varianza (o desviación típica) de  $\ln R_{0,5}$ , respecto a la de  $\ln F_{0,5}$  de los Gráficos 1.a y 1.b. Una mayor volatilidad del tipo de interés implícito o un mayor plazo considerado harían aumentar la varianza de  $\ln F_T$  y, por consiguiente, también la asimetría.

Ahora bien, considerando un tipo de interés medio real (por ejemplo, inferior al 20 por 100), la probabilidad de tipos de interés por encima del 100 por 100 (precios de futuro negativos) siempre será cero o despreciable, incluso para altas volatilidades o plazos. Es decir, la media de  $R_T$  es tan pequeña comparada con el rango creado por la varianza que los precios negativos están prácticamente excluidos en la práctica.

De lo que llevamos discutido hasta ahora se deduce que junto con el inconveniente de los tipos de interés negativos ya explicado, la característica más sobresaliente de las comentadas es el sentido de la asimetría de la distribución de los precios de futuro y el tipo implícito. Respecto a

esto último, Fitzgerald (1987) p. 183, escribe lo siguiente: «[...] Otro problema con los modelos para las opciones Eurodollar es que el supuesto de una distribución lognormal puede que no esté de acuerdo con las propiedades de los precios de futuro. En esencia, la distribución está sesgada hacia valores altos, y está por lo tanto más de acuerdo con las distribuciones empíricas para los tipos de interés que con las de los precios de futuro Eurodollar, que están basados en un índice de (100-Libor).» Ahora bien, esta afirmación respecto a las distribuciones empíricas puede ser cierta en los mercados norteamericano e inglés y no serlo en el caso español. El autor de este escrito ha realizado una comprobación empírica preliminar en este sentido que parece mostrar la conveniencia de utilizar el modelo de Black sobre F para los contratos Mibor-90 de vencimiento en 1993.

#### *Fórmula de valoración con el proceso estocástico para R*

Con el supuesto hecho para el tipo futuro implícito,  $R$ , y mediante las demostraciones usuales, pueden obtenerse las fórmulas de valoración de la opción de compra  $C_R = C(R, \tau; E_R)$  y la opción de venta  $P_R = P(R, \tau; E_R)$  sobre el tipo  $R$ . Sin embargo, estamos interesados en la valoración de las respectivas opciones sobre el precio de futuro  $F$ ,  $C_F = C^*(F, \tau; E)$  y  $P_F = P^*(F, \tau; E)$ , que son las que realmente se negocian en el mercado. Una opción de compra sobre  $R$ ,  $C_R$ , equivale a una opción de venta sobre  $F$ ,  $P_F$ , y viceversa, como nos indicaría la intuición.

Lo que distingue una opción de compra europea de la respectiva opción de venta es el valor de una y otra en la fecha de vencimiento, determinado por la decisión de ejercicio. Llamemos  $E_R = 100 - E$  al precio de ejercicio de la opción sobre  $R$ , siendo  $E$  el precio de ejercicio de la opción sobre  $F$ ; entonces, el valor en la fecha de vencimiento de una opción de compra sobre  $R$  es:

$$\text{Max}(R - E_R, 0) = \text{Max}[100 - F - (100 - E), 0] = \text{Max}(E - F, 0)$$

que constituye el valor en la fecha de vencimiento de una opción de venta sobre  $F$ . Igualmente se tiene que el valor en la fecha de vencimiento de una opción de venta sobre  $R$  es:

$$\text{Max}(E_R - R, 0) = \text{Max}[100 - E - (100 - F), 0] = \text{Max}(F - E, 0)$$

que es el valor en la fecha de vencimiento de una opción de compra sobre  $F$ .

Así, puede demostrarse que el valor de una opción de compra sobre  $F$ , bajo la hipótesis asumida es:

$$C_F = C^*(F, \tau; E) = P_R = P(R, \tau; E_R) = e^{-r} [E_R \cdot N(-d_1^*) - R \cdot N(-d_2^*)] \quad [13]$$

donde:

$$d_1^* = \frac{\ln(R/E_R) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}$$

$$d_2^* = d_1^* - \sigma_2 \sqrt{\tau}$$

Y el valor teórico de la correspondiente opción venta sobre  $F$  es:

$$P_F = P^*(F, \tau; E) = C_R = C(R, \tau; E_R) = e^{-r} [R \cdot N(-d_1^*) - E_R \cdot N(d_2^*)] \quad [14]$$

con  $d_1^*$  y  $d_2^*$  definidos como antes.

Nótese que estas dos fórmulas no son, respectivamente, iguales a las ecuaciones (3) y (2) cambiándoles  $F$  por  $R$  y  $E$  por  $E_R$ ; hay algo más que las distingue: el parámetro de volatilidad. En el modelo de Black se trabaja con la volatilidad de  $F$ , mientras que en el modelo alternativo se utiliza la volatilidad de  $R$ .

#### 4. CONSECUENCIAS PARA LA VALORACION Y LA NEGOCIACION

Debido a que, como ya ha sido establecido, los supuestos de partida en cuanto a la distribución de  $F$  y  $R$  son distintos en ambos modelos, también lo son los valores proporcionados por éstos.

Las variables aleatorias  $F$  y  $R$  tienen distintas volatilidades y debido a los diversos métodos de cálculo o predicción de éstas que utilizan los operadores, es imposible establecer una relación teórica entre ambas que, a su vez, permita relacionar los dos modelos de manera teórica y con carácter general. Así pues, una solución sensata es comparar los valores dados por ambos modelos, para distintos valores de los parámetros utilizando en cada uno de los casos el parámetro de volatilidad obtenido con un mismo método de cálculo (12). A nuestros efectos y puesto que es

---

(12) Igual procedimiento de comparación utiliza Fitzgerald (1987), pp. 183-184, para el caso de los valores teóricos de las opciones de compra dados por los respectivos modelos adaptados al caso de las opciones sobre Eurodollar del LIFFE.



imposible unificar los variados métodos de estimación o cálculo de volatilidades que utilizan los operadores del mercado, se ha optado por el método de cálculo más tradicional y sencillo: el cálculo de la volatilidad histórica (13). En concreto, se ha calculado la volatilidad tomando los precios de cierre diarios de 20 días de negociación seguidos elegidos al azar de los contratos de vencimiento en junio de 1992 y septiembre de 1993, para tener dos volatilidades distintas que permitan más posibilidades de comparación. En ambos casos se ha calculado la volatilidad sin ponderaciones para  $F$  y para  $R$ . Las volatilidades obtenidas son: 0,0056 para  $F$  y 0,0404 para  $R$ , en el primer caso, y 0,0209 para  $F$  y 0,1547 para  $R$ , en el segundo.

Estas medidas de volatilidad ilustran perfectamente cómo son distintas la volatilidad de  $F$  y la de  $R$ , siendo mayor la de esta última variable por su menor valor.

La Tabla I recoge los valores teóricos dados por el modelo de Black y el alternativo para distintos valores de los parámetros de los modelos, usando las medidas de volatilidad anteriores (14). Los valores de los distintos activos vienen expresados en las unidades de cotización del mercado español, por esto la prima de la opción está expresada en puntos con un valor de 250 pesetas. Aunque en el mercado español no son posibles fracciones de un punto, en la Tabla I aparecen las primas hasta las milésimas de punto para ganar en precisión en la comparación. El resto de los parámetros están expresados en las unidades comentadas en la fórmula (2).

---

(13) El procedimiento utilizado es mostrado, por ejemplo, en Hull (1989), p. 88, justificado por la expresión (5).

(14) Podría argumentarse que las volatilidades calculadas no son apropiadas para determinar las volatilidades para opciones a las que les quedan 3 y 6 meses de vida; pero es que la elección tanto de esos como del resto de los parámetros ( $\tau$ , tipo de interés...) ha sido aleatoria, sin pretender que se correspondan con los de mercado de alguna fecha concreta. Nuestro objetivo no es comparar los valores dados por los modelos con los precios de mercado sino comparar los valores de los dos modelos en determinados escenarios simulados.

TABLA I  
VALORES TEORICOS DE LAS OPCIONES SOBRE CONTRATO MIBOR (precio de ejercicio = 87,00)

Parámetros					Opciones de compra					Opciones de venta				
F	Sigma (con F)	Sigma (con R)	TAU	Tipo de interés	Black (con F)	Alternativo (con R)	Diferencia (en puntos)	Delta (Black)	Delta (Alternativo)	Black (con F)	Alternativo (con R)	Diferencia (en puntos)	Delta (Black)	Delta (Alternativo)
85,00	0,0209	0,1547	0,5	0,08	3,019	6,560	-3,541	0,0563	0,0831	195,177	198,718	-3,541	-0,9044	-0,8777
86,00					15,230	21,025	-5,795	0,2106	0,2229	111,309	117,104	-5,795	-0,7502	-0,7379
87,00					49,288	54,481	-5,194	0,4832	0,4594	49,288	54,481	-5,194	-0,4776	-0,5013
88,00					111,728	113,832	-2,104	0,7518	0,7214	15,649	17,753	-2,104	-0,2090	0,2394
89,00					195,514	195,615	-0,101	0,9021	0,8931	3,357	3,458	-0,101	-0,0587	-0,0677
85,00	0,0209	0,1547	0,5	0,12	2,959	6,430	-3,471	0,0552	0,0814	191,312	194,783	-3,471	-0,8865	-0,8603
86,00					14,929	20,609	-5,680	0,2064	0,2185	109,105	114,785	-5,680	-0,7353	-0,7232
87,00					48,312	53,403	-5,091	0,4737	0,4503	48,312	53,403	-5,091	0,4681	-0,4914
88,00					109,516	111,578	-2,063	0,7369	0,7071	15,339	17,402	-2,063	-0,2048	-0,2347
89,00					191,643	191,742	-0,099	0,8842	0,8754	3,290	3,389	-0,099	-0,0576	-0,0663
85,00	0,0209	0,1547	0,25	0,08	0,400	1,330	-0,930	0,0129	0,0289	196,440	197,370	-0,930	-0,9673	-0,9513
86,00					6,004	9,220	-3,215	0,1328	0,1563	104,024	107,240	-3,215	-0,8474	-0,8239
87,00					35,558	39,313	-3,755	0,4921	0,4750	35,558	39,313	-3,755	-0,4881	-0,5052
88,00					104,247	105,397	-1,149	0,8470	0,8238	6,228	7,377	-1,149	-0,1332	-0,1564
89,00					196,513	196,536	-0,023	0,9659	0,9636	0,473	0,496	-0,023	-0,0143	-0,0166
85,00	0,0056	0,0404	0,5	0,08	0,000	0,000	-0,000	0,0000	0,0000	192,158	192,158	-0,000	-0,9608	-0,9608
86,00					0,017	0,055	-0,039	0,0017	0,0044	96,096	96,134	-0,039	-0,9591	-0,9564
87,00					13,211	14,235	-1,024	0,4812	0,4749	13,211	14,235	-1,024	-0,4796	-0,4859
88,00					96,098	96,105	-0,007	0,9589	0,9582	0,019	0,026	-0,007	-0,0019	-0,0026
89,00					192,158	192,158	0,000	0,9608	0,9608	0,000	0,000	0,000	-0,0000	-0,0000
85,00	0,0056	0,0404	0,5	0,12	0,000	0,000	-0,000	0,0000	0,0000	188,353	188,353	-0,000	-0,9418	-0,9418
86,00					0,016	0,054	-0,038	0,0017	0,0043	94,193	94,231	-0,038	-0,9401	-0,9375
87,00					12,949	13,953	-1,004	0,4716	0,4655	12,949	13,953	-1,004	-0,4701	-0,4762
88,00					94,195	94,202	-0,007	0,9399	0,9393	0,019	0,025	-0,007	-0,0018	-0,0025
89,00					188,353	188,353	0,000	0,9418	0,9418	0,000	0,000	0,000	-0,0000	-0,0000
85,00	0,0056	0,0404	0,25	0,08	0,000	0,000	-0,000	0,0000	0,0000	196,040	196,040	-0,000	-0,9802	-0,9802
86,00					0,000	0,001	-0,001	0,0000	0,0001	98,020	98,021	-0,001	-0,9802	-0,9801
87,00					9,532	10,270	-0,738	0,4906	0,4861	9,532	10,270	-0,738	-0,4896	-0,4940
88,00					98,020	98,020	-0,000	0,9802	0,9802	0,000	0,000	-0,000	-0,0000	-0,0000
89,00					196,040	196,040	0,000	0,9802	0,9802	0,000	0,000	0,000	-0,0000	-0,0000

La Tabla I incorpora también el valor del coeficiente delta (en tanto por uno) para enriquecer la comparación entre los dos modelos. Las expresiones de este coeficiente para el caso del modelo alternativo son:

$$\Delta_{CALL} = \frac{\partial C_F}{\partial F} = \frac{\partial C_F}{\partial R} = e^{-r\tau} \cdot N(-d_1^*)$$

$$\Delta_{PUT} = \frac{\partial P_F}{\partial F} = \frac{\partial P_F}{\partial R} = e^{-r\tau} \cdot N(-d_1^*)$$

De la Tabla I se desprende fundamentalmente, como se esperaba, que la diferencia entre ambos modelos es apreciable cuando la volatilidad es suficientemente alta. Ya comentamos que mayor varianza de  $\ln F_T$  [mayor varianza de  $\ln (F_T / F)$ ] implica mayor asimetría en la distribución de  $F_T$  y también en la de  $R_T$  del modelo alternativo, lo que hace divergir ambas distribuciones (Gráficos 1.a y 2.b, y Gráficos 1.b y 2.a) y, consecuentemente, ambos modelos.

De un análisis más completo del que se desprende de la Tabla I pueden obtenerse las siguientes conclusiones:

- En cuanto a la correspondencia existente entre la relación del precio de ejercicio y la cotización del subyacente, y la diferencia entre los dos modelos (15):
  - ésta depende del precio de ejercicio considerado,
  - también depende de la volatilidad,
  - es distinta o igual para opciones de compra y de venta dependiendo del precio de ejercicio y la volatilidad considerados; en ocasiones se comportan igual los dos tipos de opciones y en otras tienen comportamientos opuestos.
- Por otro lado, a menor volatilidad menor es la diferencia entre los valores proporcionados por los modelos. A partir de un cierto nivel las diferencias son menores a un punto (250 ptas.). También cuanto menor es la duración de vida de la opción, la diferencia entre ambos modelos se vuelve más pequeña. Estos dos resultados coinciden con el análisis teórico ya efectuado.

---

(15) En cuanto a esta relación para el caso de las opciones del LIFFE, Fitzgerald (1987), p. 184, escribe: «la escala de tipos de interés tiende a producir valores más altos para las opciones "out-of-the-money" y valores más bajos para las opciones "at-the-money" e "in-the-money"».

## 5. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

En ocasiones cuando se dice que el modelo de Black (1976) sigue siendo ampliamente utilizado por los operadores del mercado se olvida que, al menos los operadores experimentados, no utilizan los valores proporcionados por el mismo tal cual, sino que utilizan los valores obtenidos tras una serie de modificaciones, alteraciones o ajustes *ad-hoc* realizados al modelo, motivados por la experiencia y conocimiento del mercado que poseen. Estos ajustes «equivalen» en la práctica a algunos modelos teóricos más sofisticados y «perfectos» producidos por los académicos.

La modificación del modelo de Black utilizada por muchos operadores para valorar las opciones sobre el contrato Eurodollar, consistente en utilizar el tipo de interés como variable fundamental subyacente en lugar del precio de futuro, conlleva un cambio de hipótesis con consecuencias teóricas y prácticas en la valoración y la negociación consiguiente. La causa de ellas está en el cambio de la distribución teórica supuesta en uno y otro caso para el precio de futuro y el tipo de interés.

Un resultado importante del análisis teórico y práctico efectuado es que la diferencia entre ambas alternativas de valoración está muy determinada por la volatilidad del subyacente y por la duración de vida de la opción. Cuanto mayor es el valor de estas variables mayor es la diferencia entre las alternativas.

El operador con esta clase de opciones, antes de elegir entre una y otra alternativa, debe analizar y comprender bien, por un lado, las diferencias entre los valores de las opciones dados por los modelos, para los distintos valores que toman los parámetros del modelo en el mercado; por otro, el comportamiento de esas diferencias ante cambios en los diferentes parámetros que lo determinan y, por último, las modificaciones a realizar en el predictor que utilice de la volatilidad futura y sus consecuencias en los valores teóricos de cada modelo, según se trabaje con la escala  $F$  ó la  $R$ .

Desde un punto de vista académico puede estudiarse con más detenimiento el comportamiento de los precios del contrato de futuro sobre Mibor-90 para comprobar qué hipótesis lo describe mejor. Se puede, por ejemplo, estimar los coeficientes de asimetría y curtosis poblacionales, o realizar contrastes de lognormalidad (normalidad). Otra vía de investigación empírica adicional puede ser la comparación entre los precios de mercado y los teóricos dados por ambos modelos. Estudios preliminares

efectuados por el autor parecen mostrar la conveniencia de la utilización del modelo de Black en el período bajista de intereses de 1993. Este análisis empírico puede efectuarse también para el contrato Mibor-360. También puede plantearse la extensión del análisis efectuado a los modelos sobre opciones americanas como las fórmulas de Kim (1990 y 1994), el enfoque de la opción compuesta [Whaley (1986a) y Shastri y Tandon (1986)], el enfoque de la aproximación cuadrática [Barone-Adesi y Whaley (1987) y Whaley (1986b)], además de los métodos numéricos como el método binomial, el método de las diferencias finitas, o los de simulación.

Igualmente ha de tenerse en cuenta los modelos más sofisticados pero, a la vez, teóricamente más apropiados para la valoración de las opciones sobre tipos de interés, como los modelos con tipos de interés estocásticos. No debe olvidarse que en el modelo de Black y el alternativo se considera constante el tipo de interés a corto plazo sin riesgo, mientras se toma al tipo de interés a corto plazo de un depósito interbancario futuro como variable aleatoria. En opinión del autor de este escrito, la investigación en esta vía es fundamental para obtener relaciones más coherentes y robustas entre las variables subyacentes fundamentales y los valores dados para las opciones. Una única estructura o marco teórico para los distintos activos derivados de los tipos de interés tiene, además, una clara e importantísima utilidad práctica.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- AITCHISON, J., y BROWN, J. A. C. (1969): *The lognormal distribution* (Cambridge: Cambridge University Press).
- BARONE-ADESI, G., y WHALEY, R. E. (1987): «Efficient analytic approximation of American option values», *The Journal of Finance*, vol. XLII, núm. 2, pp. 301-320.
- BLACK, F. (1976): «The pricing of commodity contracts», *Journal of Financial Economics*, 3, núm. 2, pp. 167-179.
- BLACK, F., y SCHOLES, M. (1973): «The pricing of options and corporate liabilities», *Journal of Politic Economy*, may-june, pp. 637-654.
- BOBIN, C. A. (1990): *Agricultural Options* (John Wiley & Sons, Inc. USA)
- CHEN, R., y SCOTT, L. (1993): «Pricing interest rate futures options with futures-style margining», *The Journal of Futures Markets*, vol. XIII, núm. 1, pp. 15-22.
- COX, J. C.; ROSS, S. A., y RUBINSTEIN, M. (1979): «Option pricing: a simplified approach», *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229-263.
- FITZGERALD, M. D. (1987): *Financial Options* (Euromoney Publications, London).

- HELMS, B. P., y MARTELL, T. F. (1985): «An examination of the distribution of futures price changes», *The Journal of Futures Markets*, vol. V, núm. 2, pp. 259-272.
- HULL, J. (1989): *Options, futures and other derivatives securities* (Prentice-Hall, Inc., N.J.)
- JARROW, R. A., y WIGGINGS, J. B. (1989): «Option pricing and implicit volatilities», *Journal of Economics Surveys*, 3, pp. 59-81.
- KIM, I. J. (1994): «Analytic approximation of the optimal exercise boundaries for american futures options», *The Journal of Futures Markets*, vol. XIV, núm. 1, pp. 1-24.
- LAMOTHE, P. (1993): *Opciones Financieras* (MacGraw-Hill, Madrid).
- LUCÍA LÓPEZ, J. J. (1993): «La valoración de opciones sobre contratos de futuro sobre tipos de interés», *Trabajo de investigación*, Departamento de Economía Financiera y Matemática, Universidad de Valencia.
- MEFF-R. F.: *Reglamento, Condiciones Generales de los Contratos y Circulares*, Barcelona.
- NATENBERG, S. (1988): *Option volatility and pricing strategies* (Probus Publishing Company, Chicago, Illinois).
- SHASTRI, K., y TANDON, K. (1986): «An empirical test of a valuation model for American options on futures contracts», *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XXI, núm. 4, pp. 377-392.
- VENKATESWARAN, M.; BRORSEN, B. W., y HALL, J. A. (1993): «The distribution of standardized futures price changes», *The Journal of Futures Markets*, vol. XIII, núm. 3, pp. 279-298.
- VINCE, R. (1992): *The mathematics of money management* (John Wiley & Sons, Inc. USA)
- WHALEY, R. E. (1986a): «On valuing American futures options», *Financial Analysts Journal*, may-june, pp. 49-59.
- WHALEY, R. E. (1986b): «Valuation of American futures options: theory and empirical tests», *The Journal of Finance*, vol. XLI, núm. 1, pp. 127-150.