

Francisco P.
Calatayud
y Francisco

Calero

*Dpto. de Economía
Financiera y
Contabilidad. Universidad
de La Laguna*

DURACION Y ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION DE CARTERAS DE RENTA FIJA

*Resumen.—Palabras clave.—Abstract.—Key
words.—1. Introducción.—2. Evidencia empírica.—3. Una aproximación
lineal de los cambios en la duración.—4. Estrategias de inmunización
dinámica. Simulaciones.—5. Conclusiones.—Bibliografía.*

RESUMEN

LA importancia gradualmente creciente que está tomando la gestión de carteras de renta fija (Fondos de Inversión, Fondos de Titulización Hipotecaria, etc.) está contribuyendo al desarrollo teórico y empírico del concepto de duración como herramienta útil en el objetivo de reducir (e incluso minimizar) el riesgo de tipo de interés de tales carteras (T.I.R.). El hecho de que tal concepto dependa funcionalmente de las tasas de rendimiento interno, de la cuantía y frecuencia en el pago de cupones y del tiempo hasta el vencimiento del instrumento considerado, complica bastante el ajuste en la composición de las carteras ante variaciones estocásticas de aquellas variables.

En este trabajo se analiza el comportamiento de la duración de algunos títulos representativos de la Deuda Pública en ptas. a lo largo de 1992 y se extraen algunas conclusiones sobre cuáles deben ser las estrategias de cobertura del riesgo de interés ante variaciones inesperadas de las T.I.R. de mercado.

PALABRAS CLAVE

Renta Fija, Duración, Inmunización, Procesos estocásticos.

ABSTRACT

The growing importance of bond portfolios management (investment funds, securitization mortgage funds, etc.) is contributing to the theoretical and empirical development of the concept of duration. This concept is becoming an useful instrument for the reduction (or even immunization) of the interest risk of bond portfolios. The fact that such concept is functionally dependent on internal rates of return (I.R.R.), the amount and frequency of payoffs, and the time up the maturity of any asset, makes more difficult the process of adjustment in the composition of portfolios when stochastic variations of these variables occurred.

In this paper, we analyze the behavior of the duration of some representative domestic Treasury bonds (in pesetas) during 1992. We also provide some results about which interest risk hedging strategies must be taken when unexpected shocks in market rates of return happened.

KEY WORDS

Bonds, duration, immunization, stochastic processes.

1. INTRODUCCION

El concepto de **duración** no es relativamente nuevo. Fue utilizado por primera vez en 1938 por Macaulay como una medida de la vida media de un título. En 1946, Hicks, de manera independiente, introdujo el mismo concepto, pero lo llamó **período medio** y lo definió como la elasticidad del precio del bono respecto al factor de descuento $1/(1+r)$ y demostró que los cambios en el tipo de interés no afectarían a los precios relativos de dos bonos que tuvieran la misma duración. La diferencia con el concepto de Macaulay era que éste se basaba en los flujos de caja durante la vida de un título.

Desarrollos posteriores fueron los de Samuelson (1945) y Redington (1952) quienes aplicaron el concepto de duración a sus estudios sobre la sensibilidad del patrimonio neto de algunas instituciones ante los cam-

bios en los tipos de interés. Fisher y Weil (1971) desarrollaron el concepto como una estrategia de inmunización para inversiones en bonos. Por su parte, Bierwag, Kaufman y Toevs (1983) han puesto de manifiesto que la duración es un importante concepto teórico y práctico en el análisis de rendimientos de títulos de renta fija.

El concepto de **duración** se puede definir desde tres puntos de vista diferentes:

1. **Macaulay (1938):** Media, de los períodos de tiempo en que tienen lugar los flujos de caja (t), ponderados por las participaciones relativas de los valores actualizados de tales flujos en el valor actual del bono (w_t).

$$D = \sum_{t=1}^n t \cdot w_t \quad w_t = \frac{(1+r)^{-t} \cdot C_t}{V_0} \quad [1]$$

Siendo:

V_0 = Valor actual del bono.

C_t = Flujo de caja en t .

r = T.I.R. del bono.

2. **Hicks (1946):** Como la elasticidad del valor del bono ante variaciones en el factor de descuento $(1+r)^{-1}$. (1)

$$D = - \frac{1+r}{V_0} \cdot \frac{dV_0}{dr} \quad [2]$$

Es fácil, ver [Bierwag (1991), pp. 84-85] que ambas definiciones son equivalentes.

(1) En realidad, llamando $z = (1+r)^{-1}$ al factor de descuento, la definición de Hicks es:

$$D = \frac{dV_0}{dz} \cdot \frac{z}{V_0} \quad [3];$$

pero si $V_0 = V_0(z) = V_0 [z(r)]$, por la regla de derivación de la cadena

$$\frac{dV_0}{dz} = \frac{dV_0}{dz} \cdot \frac{dz}{dr} = \frac{dV_0}{dr} [-(1+r)^{-2}]$$

Por lo que $\frac{dV_0}{dz} = -(1+r)^2 \frac{dV_0}{dr}$ y, sustituyendo en [3] se obtiene [2].

Por tanto, cuanto mayor sea la duración de un título, mayor es el cambio porcentual en el precio del título para un cambio dado en el rendimiento.

3. También se puede definir como el número de períodos necesarios para que la pérdida (ganancia) del valor de un bono debida a una variación al alza (baja) en las T.I.R. de mercado, sea compensada por el incremento (disminución) de los flujos acumulados de la reinversión de cupones a la nueva T.I.R. Aunque, en realidad, esto último no es una definición, sino un resultado. Bajo determinadas condiciones asociadas a los procesos estocásticos que generan en el tiempo las diferentes estructuras temporales de tipos de interés, se demuestra [Bierwag (1991), pp. 127-132] que la rentabilidad acumulada por una cartera de bonos en un número de períodos coincidente con la duración de la cartera nunca será inferior a la T.I.R. prometida por la cartera en el momento de su construcción bajo la hipótesis de constancia de los tipos de interés. Volveremos sobre este punto más adelante.

La definición de Macaulay, con todo y pese al interés que tiene la posibilidad de asociar el concepto de duración con el del tamaño del período planificador preciso para inmunizar a la cartera del riesgo de interés, se basa en la constancia de la tasa de interés, y ese es un supuesto muy restrictivo.

La introducción de estructuras de tipos de interés más realistas [bien basadas en la teoría de las expectativas puras –Fisher (1930)– de la segmentación –Culberston (1957)– y del hábitat preferido –Modigliani y Such (1967)–], altera, en consecuencia la definición de la duración; no obstante [Bierwag (1991), pp. 285 y ss.], se pueden construir «indicadores» para diferentes hipótesis de variación en los procesos estocásticos que generan tales estructuras (shocks aditivos, multiplicativos, log-aditivos, log-multiplicativos, etc.) que conservan las «buenas» propiedades del concepto de duración clásico tales como la de mantener su interpretación como elasticidad. Las mejoras introducidas mediante el análisis expost de las estrategias de inmunización basadas en estos nuevos indicadores no parecen, sin embargo, justificar la enorme complejidad de los cálculos a realizar, toda vez que sus resultados no difieren significativamente de los logrados mediante el ajuste dinámico de carteras siguiendo la **duración de Macaulay**.

El cálculo de la duración de un título puede ser un proceso complicado utilizando el método de **media ponderada**. Así Badcock (1984) ha recomendado el uso de la siguiente fórmula:

$$D = \frac{1+r'}{r'} \cdot \frac{A}{P} + \left[1 - \frac{c/2}{r'} \right] \cdot \frac{B}{P} \quad [4]$$

donde el precio del Bono, P, se ha descompuesto en dos términos, A y B, tales que:

$$A = \frac{(100)c/2}{r'} \cdot [1 - (1+r')^{-M}]$$

$$B = (100)(1+r')^{-M}$$

De esta manera la duración se divide en dos partes:

- a) si tenemos un bono a la par, entonces $c/s = r'$ y la segunda parte que concierne a B desaparece y la duración es simplemente:

$$[(1+r')/r'] A/P$$

- b) si es un bono con premio o descuento, la segunda parte sí es relevante y es un ajuste para sumar el efecto que sobre la duración tienen el premio o el descuento.

Otro desarrollo de la fórmula de duración se halla simplemente mediante la sustitución de P-B por A en [4], obteniéndose:

$$D = \frac{1+r'}{r'} + \frac{B}{P} \left[(M-1) - \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{M}{r'} \left(\frac{c}{2} \right) \right] \quad [5]$$

En este caso, también se puede observar la duración dividida en dos partes:

- a) $(1+r')/r'$, es la duración de un bono perpetuo que paga un cupón unitario, como se puede demostrar sin más que aplicar la definición de Hicks a $P=1/r'$, que como sabemos es el precio de una corriente perpetua de una unidad monetaria.
- b) un término de ajuste,

$$AJUSTE = \frac{B}{P} \cdot \left[(M-1) - \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{M}{r'} \cdot \frac{c}{2} \right] \quad [6]$$

Es posible que este ajuste sea positivo de tal forma que la duración exceda a la duración del bono perpetuo. Esto puede tener lugar para algunos bonos al descuento y surge debido al «efecto precio» sobre la duración.

Utilizando los valores de P y B, la ecuación es la siguiente:

$$D = \frac{1+r'}{r'} \frac{M\left(\frac{c}{2}-r'\right) + (1+r')}{(1+r')^M \left(\frac{c}{2}\right) - \left(\frac{c}{2}-r'\right)} \quad [7]$$

El denominador, en el término de ajuste, aumenta más deprisa con M que el numerador siempre que el tipo de cupón sea positivo. Por tanto, la duración de tales bonos tiende a acercarse cada vez más a la duración del bono perpetuo a medida que aumenta el vencimiento porque el término de ajuste tenderá a cero.

Para algunos bonos al descuento la duración puede aumentar con el vencimiento y situarse por encima de la duración del bono perpetuo, pero después a medida que el vencimiento continúa aumentando, la duración disminuye hacia la duración del bono perpetuo.

Un aumento del rendimiento reduce la duración, dado un tipo de cupón c y un vencimiento M . La duración del bono perpetuo $(1+r')/r' = 1+1/r'$ disminuye claramente a medida que r' aumenta. El término de ajuste disminuye en valor absoluto porque el denominador aumenta más que el numerador. Esto es suficiente para que D disminuya.

En definitiva, las variables y los efectos que producen son los siguientes:

- (i) **El cupón.**—La duración y el tipo de interés pagado a través del cupón están inversamente relacionados, pues a mayor tipo de interés, menor duración. Cuanto mayor sea el cupón, el propietario del bono recibe una cantidad mayor, relativamente hablando, de flujos de caja en los primeros años de la vida del bono (tanto por el mayor volumen de pesetas recibidos como por el menor efecto del descuento en los primeros flujos del bono) lo cual disminuye la duración. Este efecto también se produce cuanto mayor es la frecuencia del pago de cupones, ya que permite que el bono genere una parte superior de su valor de mercado antes de la fecha de vencimiento.

Para el caso de un bono cupón cero la duración coincide con el

vencimiento del bono, puesto que solamente existe un flujo de caja, y éste tiene lugar en el vencimiento. Cuando tratamos bonos que suponen diferentes flujos de caja la duración siempre se situará entre el primer flujo y el último, es decir, la duración siempre será inferior al vencimiento del bono en cuestión. Y por tanto, cuanto mayor sea la frecuencia de pago de los cupones, menor será la duración.

- (ii) **El plazo hasta el vencimiento.**—Cuanto mayor sea el plazo hasta el vencimiento, mayor será la duración y mayor la volatilidad del bono. Es decir, cuanto más alejado sea la fecha de vencimiento del bono mayor será el riesgo de dejar de cobrar algún cupón y más se tiene que esperar a cobrar los cupones que faltan. Aunque puede no ser así en el caso de que los cupones sean bajos (cupón por debajo del rendimiento esperando) o que la emisión de bonos se realice al descuento. Es decir, la duración aumenta con el vencimiento de los bonos a la par o con premio y con los bonos cupón cero. Sin embargo, para algunos bonos emitidos al descuento la duración aumenta con el vencimiento hasta un período crítico a partir del cual si aumenta el vencimiento la duración disminuye.

Por otra parte, los bonos perpetuos tienen una duración igual al inverso del rendimiento del bono hasta su vencimiento, sin importar cuál sea el cupón, como ya se ha visto anteriormente.

Conforme va transcurriendo el tiempo la duración se va acortando a una tasa creciente, debido al mayor efecto que produce el que el último flujo de caja suponga el reembolso del nominal del título. Como habíamos mencionado, en el caso de los bonos cupón cero esta tasa es constante, puesto que sólo hay un flujo que es el último, y el resto de los bonos, ya sean al descuento o con premio, se aproximan asintóticamente a la duración del bono perpetuo conforme aumenta el vencimiento.

- (iii) **El rendimiento hasta el vencimiento.**—El rendimiento hasta el vencimiento es la tasa de descuento utilizada en la determinación del valor actual de un bono, por lo que cuando esta tasa de descuento aumenta (manteniéndose constante el vencimiento y el tipo de cupón), desciende el valor actual de los flujos más lejanos en el tiempo y por tanto la duración desciende. En conclusión se puede decir que hay una relación inversa entre la duración y la tasa de descuento utilizada en el cálculo del valor actual de un bono.

La duración de una cartera se puede hallar como una media ponderada de las duraciones de los títulos que lo integran y donde las ponderaciones son las proporciones respectivas de cada título dentro de la cartera y que suman la unidad.

Supongamos que tenemos tres títulos formando la cartera:

$$D=B_1D_1+B_2D_2+B_3D_3$$

donde $B_1+B_2+B_3=1$

La duración D de la cartera nunca puede ser mayor que la duración más larga de los tres títulos y nunca puede ser más pequeña que la duración más pequeña de los tres títulos. De acuerdo con esto, el inversor puede considerar la duración de la cartera como una variable de decisión.

Como se ha indicado anteriormente, se puede demostrar que el tiempo que se precisa para que la acumulación de la inversión contrarreste cualquier ganancia o pérdida de capital debidas a un cambio en los rendimientos es exactamente igual a la duración inicial de la cartera, y se le conoce con el nombre de **ventana de duración**. Las razones de la existencia de la ventana de duración provienen de la naturaleza convexa del valor acumulado del fondo de inversión como función del cambio inicial del rendimiento. Pero para sacarle el mayor rendimiento al concepto de ventana de duración hay que ponerlo en relación con otro concepto que es el de **período planificador**, que se explica como el tiempo durante el cual un fondo de inversión está en activo, es decir, el tiempo en que un inversor desea mantener un fondo de inversión, por lo tanto el período planificador viene afectado por la actividad especulativa del inversor.

Lo que se pretende conseguir con estos conceptos es llegar a la **inmunización de la cartera**, es decir, a que el rendimiento de la cartera sea inmune a los cambios en el tipo de interés. Ello se consigue si el inversor selecciona los títulos de una cartera de manera que la duración de dicha cartera se iguale a la longitud del período planificador. Con ello decimos que la cartera está inmunizada, lo que quiere decir que la tasa de rendimiento anual realizada nunca se puede situar por debajo del rendimiento inicial al que el inversor compró los títulos. De no ocurrir esto pueden darse dos casos:

1. Si la duración de la cartera formada es mayor que la longitud del período planificador, las ganancias o pérdidas de capital incorporadas en la tasa de rendimiento anual realizada y que re-

sultan de los cambios iniciales en el rendimiento serán superiores al rendimiento de la reinversión de los cupones cobrados a lo largo del período planificador.

2. Si la duración de la cartera es menor que la longitud del período planificador, el rendimiento de la reinversión de los cupones cobrados incorporado en la tasa de rendimiento realizada predominará sobre cualquier ganancia o pérdida de capital resultante de cambios en el rendimiento de mercado.

2. EVIDENCIA EMPIRICA

Sobre la base de la metodología expuesta en el epígrafe anterior se ha estudiado la evolución de cuatro referencias (Bono 13,50/90 Vto. 25.06.95; Bono 11,60/91 Vto. 15.01.97; Obligación 12,25/90 Vto. 25.03.2000 y la Obligación 11,30/91 Vto. 15.01.2002) del mercado español de deuda anotada durante 1992, evaluando la duración en los momentos en los que hubo cambios significativos en los tipos de interés de la subasta de C.B.E.s y/o en las rentabilidades de las emisiones de deuda pública anotada (que, obviamente, produjeron o fueron anticipadas por cambios en las T.I.R.s negociadas en el mercado secundario de deuda del Tesoro). Tales resultados se presentan en los gráficos 1 a 4.

GRÁFICO 1

BONO 13,50/90 VTO. 25-06-95

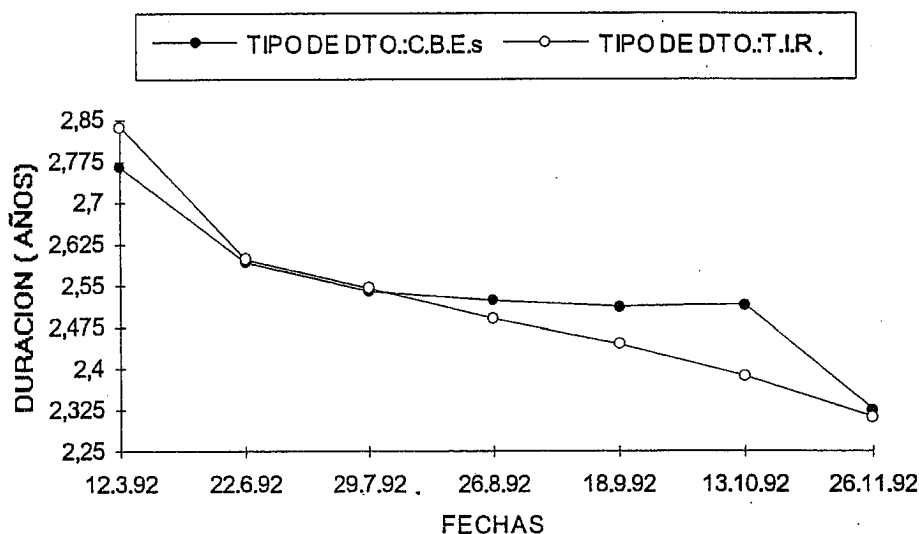


GRÁFICO 2

BONO 11,60/91 VTO. 15-01-97

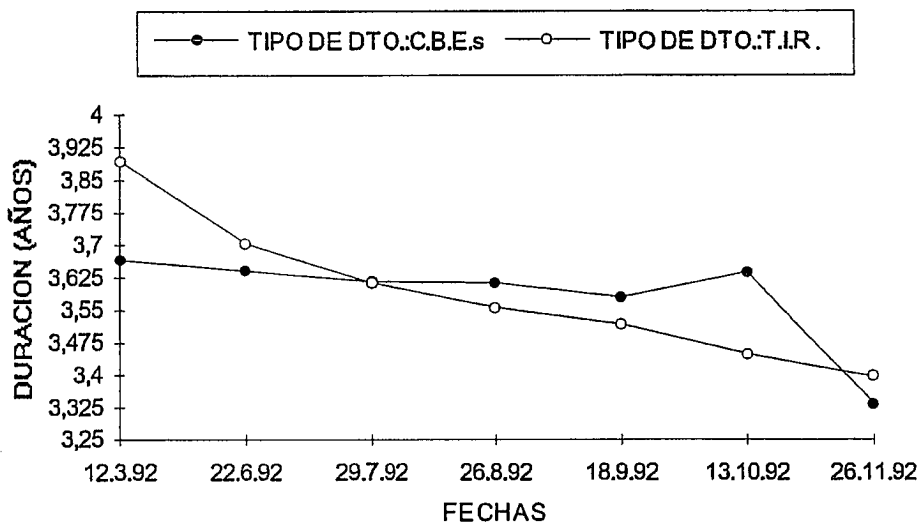


GRÁFICO 3

BONO 12,25/90 VTO. 25-03-00

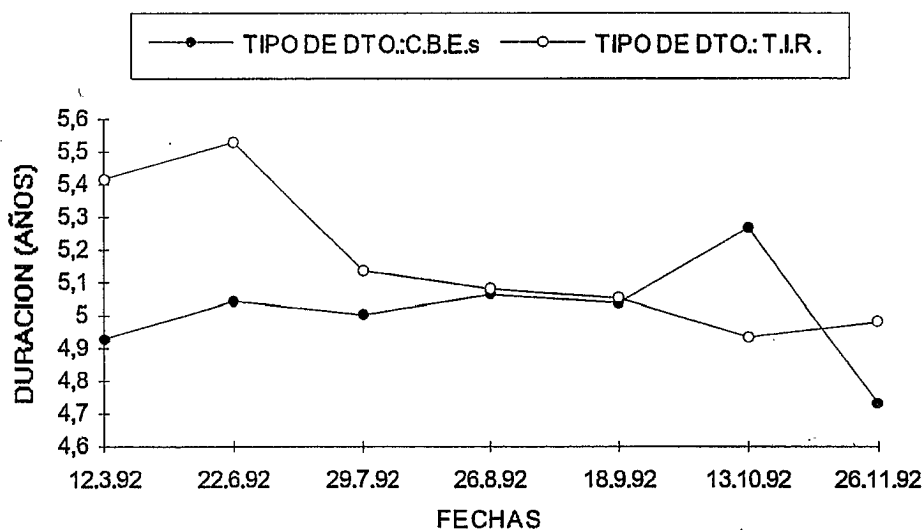
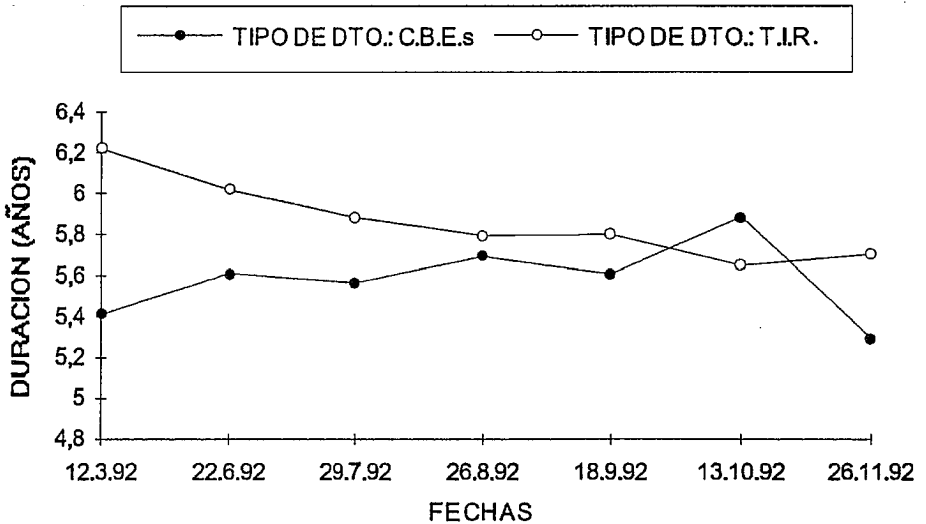


GRÁFICO 4

BONO 11,30/91 VTO. 15-01-02



En los gráficos se presenta la evolución de la duración de estas cuatro referencias utilizando alternativamente como factor de descuento el tipo de la subasta de C.B.E.s o la T.I.R. del bono.

Las conclusiones más destacadas del análisis de esta información podrían ser:

- 2.1. La utilización del tipo de descuento de la subasta decenal de C.B.E.s como la tasa de descuento de los flujos de caja de los bonos, produce una evolución de la duración que no responde al comportamiento esperado (pendiente positiva con respecto a la variable tiempo hasta el vencimiento).
- 2.2. Utilizando como tasa de descuento de los flujos esperados la T.I.R. del bono, se observa un comportamiento «correcto» de la duración y el tiempo hasta el vencimiento salvo en el período entre el 12.03.92 y el 22.06.92 para la O/12,25. Ello podría deberse a dos factores:
 - 2.2.1. La obligación cotizaba con un descuento relativamente mayor que las otras dos referencias con cupones inferiores al 12%, debido a la diferente estructura del saldo vivo de tales referen-

cias. En efecto, mientras en el período 12.03/22.06 la obligación 12,25 mantuvo un saldo vivo de 398,6 MM. con un grado de cesión a terceros del 94,3%, las otras dos referencias pasaron de 23,9 MM. a 411,9 MM., la B/11,60 y de 379,6 MM. a 746,3 MM. la O/11,30. Es decir, al estar emitiéndose todavía tramos de estas dos últimas, la falta de liquidez de las mismas propiciaba unos precios de mercado por encima de los niveles normales para esos cupones.

2.2.2. Alternativamente se podría proponer como explicación de este fenómeno el que la subida de los tipos en este período (un 0,85% como promedio en todas las referencias, correspondiendo a unas expectativas de incremento de los tipos oficiales que se materializaría el 26 de julio con un alza de 60 puntos básicos en la subasta de C.B.E.s), provocó un alza de la duración de la referencia O/12,25 que no fue suficientemente compensada (dado su mayor cupón) por la disminución que en la duración debe producir el acortamiento del tiempo hasta el vencimiento.

2.3. Este fenómeno de comportamiento anormal de la O/12,25 se vuelve a repetir en el período 13.10 a 26.11 no procediendo en este caso la explicación dada en el punto 2.2.1 ya que en estas fechas el saldo vivo de las B/11,60 y O/11,30 era lo suficientemente elevado como para no argumentar estrecheces de liquidez como posible razón del comportamiento rebelde.

3. UNA APROXIMACION LINEAL DE LOS CAMBIOS EN LA DURACION

A partir de los datos que han servido para elaborar los gráficos 1 a 4 se ha intentado producir un modelo lineal que explique con suficiente robustez las variaciones en la duración de los bonos consecuencia de las variaciones en los tipos de interés, por un lado, y del acortamiento del tiempo hasta el vencimiento, por otro lado; esto es, se ha testado si la información disponible puede ajustarse a un modelo lineal del tipo:

$$dD = a + b dr + c dt + e_i$$

siendo dD la variación de la duración del bono en un intervalo de tiempo de longitud dt en el que los tipos se han modificado dr , e_i es la perturba-

ción aleatoria y a, b y c los parámetros que definen el comportamiento de dD ante cambios en r y t.

Si ello fuese posible parecería estar indicando que en una aproximación por Taylor de la función que describe la duración, los términos a partir de los de segundo orden tendrán ínfima o nula importancia como explicativos de su comportamiento, con lo que los cálculos precisos para, entre otros, describir estrategias dinámicas de ajuste de carteras, serían mucho más sencillos, tal y como veremos en el siguiente apartado.

De hecho, para las referencias O/11,30/90 y B/11,60/91 se han obtenido aproximaciones con un nivel de significación del 99,97% y 99,73% respectivamente y con los parámetros siguiendo distribuciones de probabilidad con escasa varianza. Los resultados que indican la bondad del ajuste, así como los gráficos que describen el comportamiento de los valores reales frente a los valores estimados se muestran en los cuadros 1 a 3 y en los gráficos 5 a 7.

CUADRO 1

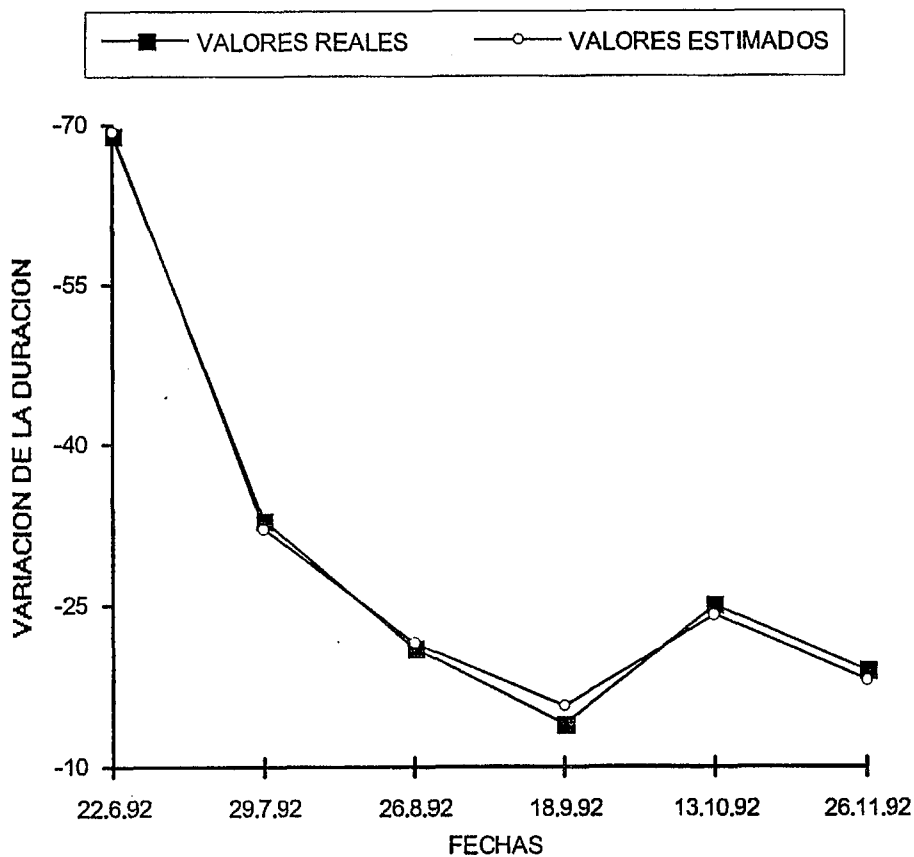
B/11,60/91

Estadísticos de la regresión		Observación	Valores estimados de dD	Residuos	Error standard de los residuos
Múltiple R	0,99864216	1	-69,3743374	0,37433741	0,27741351
R. cuadrado	0,99728616	2	-32,1644145	-0,83558551	-0,61923468
R. cuadrado ajustada	0,99547693	3	-21,5158563	0,51585634	0,38229019
Error standard	1,34938422	4	-15,6859135	1,6859135	1,24939471
N.º de obs.	6	5	-24,1527781	-0,84722194	-0,6278582
		6	-18,1067002	-0,8932998	-0,66200552

Análisis de la varianza	df	Suma de cuadrados	Error cuadrático medio	Test F	Significación del test F
Regresión	2	2007,37082	1003,68541	551,221768	0,00014138
Residuos	3	5,46251328	1,82083776		
Total	5	2012,83333			

	Coefficientes	Error standard	Estadístico t	P-value	Límite inferior al 95%	Límite superior al 95%
Constante	-1,87688728	1,03439379	-1,81272797	0,1296151	-5,17197551	1,41820095
X1	0,58171358	0,02065134	28,1683257	1,056E-06	0,51599174	0,64743541
X2	-8,5922793	0,76277322	-11,2645267	9,6327E-05	-11,0197664	-6,1647922

GRÁFICO 5

VALORES REALES Y ESTIMADOS
DE LA VARIACION DE LA DURACION DEL BONO 11,60/91

CUADRO 2

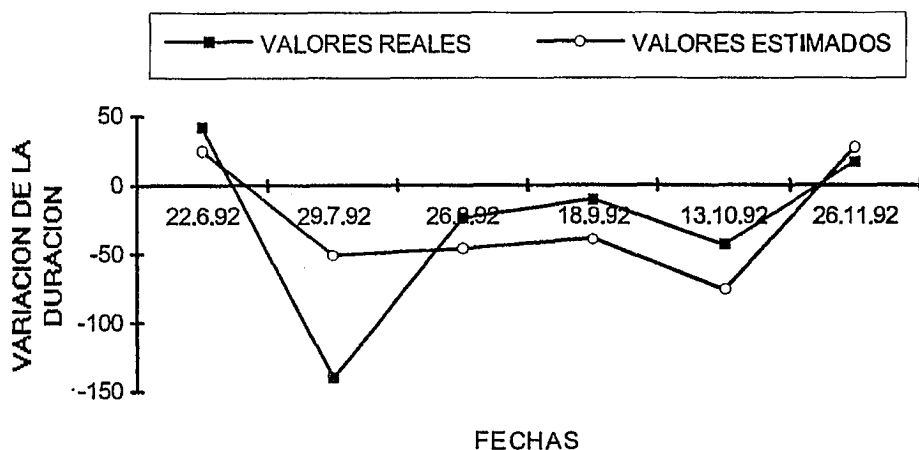
0/12,25/90

Estadísticos de la regresión		Observación	Valores estimados de dD	Residuos	Error standard de los residuos
Múltiple R	0,67736725	1	24,5134461	16,4865539	0,27529456
R cuadrado	0,45882639	2	-50,7039804	-89,2960196	-1,49107624
R cuadrado ajustada	0,09804399	3	-45,9339559	21,9339559	0,36625597
Error standard	59,8869576	4	-38,7109945	28,7109945	0,47941982
N.º de obs.	6	5	-76,0220045	33,0220045	0,55140561
		6	27,8574892	-10,8574892	-0,18129973

Análisis de la varianza	df	Suma de cuadrados	Error cuadrático medio	Test F	Significación del test F
Regresión	2	9122,15694	4561,07847	1,2717538	0,39811167
Residuos	3	10759,3431	3586,44769		
Total	5	19881,5			

	Coefficientes	Error standard	Estadístico t	P-value	Límite inferior al 95%	Límite superior al 95%
Constante	-65,3494162	46,0801014	-1,41816997	0,21534519	-211,997002	81,2981698
X1	-1,17445965	0,90465827	-1,29823569	0,25086041	-4,05348872	1,70456942
X2	-37,4150277	34,1320659	-1,09618409	0,32296605	-146,038597	71,2085411

GRÁFICO 6

VALORES REALES Y ESTIMADOS
DE LA VARIACION DE LA DURACION DEL BONO 12,25/90

CUADRO 3

0/11,30/90

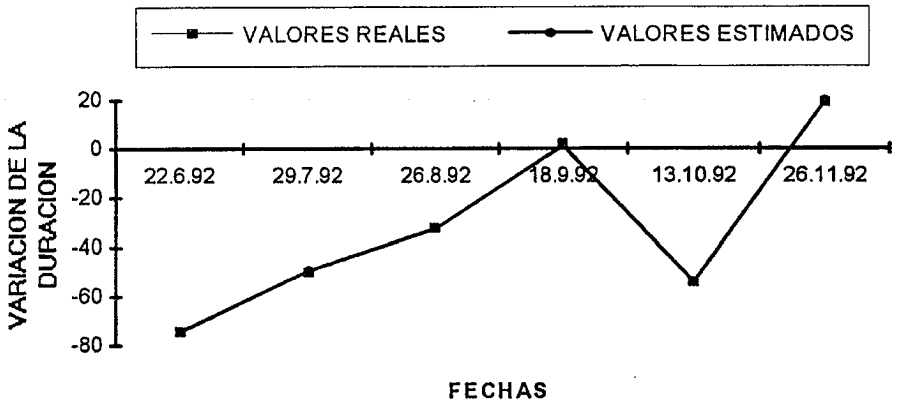
Estadísticos de la regresión		Observación	Valores estimados de dD	Residuos	Error standard de los residuos
Múltiple R	0,99985843	1	-74,2691761	0,26917611	0,34833149
R cuadrado	0,99971688	2	-49,2970035	-0,70299648	-0,90972341
R cuadrado ajustada	0,99952813	3	-32,3479988	0,3479988	0,4503332
Error standard	0,77275848	4	1,15891342	0,84108658	1,08842104
N.º de obs.	6	5	-53,8580206	-0,14197944	-0,18373067
		6	19,6132856	-0,61328558	-0,79363164

Análisis de la varianza	df	Suma de cuadrados	Error cuadrático medio	Test F	Significación del test F
Regresión	2	6325,70853	3162,85427	5296,5323	4,7639E-06
Residuos	3	1,79146699	0,59715566		
Total	5	6327,5			

	Coefficientes	Error standard	Estadístico t	P-value	Límite inferior al 95%	Límite superior al 95%
Constante	-0,48622426	0,5940441	-0,8184986	0,45030581	-2,37673948	1,40429095
X1	0,34877698	0,0118529	29,4254533	8,4982E-07	0,31105573	0,38649824
X2	-46,0333729	0,51300646	-89,7325409	3,2582E-09	-47,6659899	-44,4007559

GRÁFICO 7

VALORES REALES Y ESTIMADOS
DE LA VARIACION DE LA DURACION DEL BONO 11,30/90



Se observa, asimismo, cómo la influencia (negativa) de las variaciones en el tipo de interés sobre la duración es significativamente mayor que la influencia (positiva) de las variaciones en el tiempo hasta el vencimiento.

Por el contrario, en la referencia O/12,25/90, donde el ajuste es bastante menos robusto, el parámetro de dt es negativo, pareciendo indicar que nos hallamos ante una obligación al descuento y de muy lejano vencimiento, no obstante, y por las razones de tipo institucional apuntadas en el epígrafe anterior, nos inclinamos a pensar que la estrechez de oferta de esta obligación durante buena parte de 1992 distorsiona suficientemente los resultados como para rechazar cualquier hipótesis de comportamiento «normal».

4. ESTRATEGIAS DE INMUNIZACION DINAMICA. SIMULACIONES

Como se indicó en la introducción, una de las propiedades más robustas y de mayor utilidad a la hora de gestionar carteras o Fondos de Inversión en renta fija es, precisamente, la de que si se mantienen los bonos durante un tiempo («horizonte de planificación» o «período planificador») igual a la duración de la cartera, el rendimiento alcanzado nunca podrá ser menor que la T.I.R. prometida por la cartera en el momento de su constitución, *siempre y cuando* los cambios en las tasas de interés de

mercado se produzcan instantáneamente y de una sola vez tras la compra de los bonos y, toda vez que las variaciones en el valor de la cartera que producirán tales cambios, se verán compensadas por los diferentes flujos de reinversión de los cupones a lo largo del período planificador.

Se trata, pues, de una hipótesis muy restrictiva y muy simple. La realidad indica, por contra, que las tasas de interés (y por tanto los rendimientos de los títulos) cambian con relativa frecuencia debido a condicionantes de política monetaria y de tipo de cambio, así como a los determinantes de la oferta y demanda de activos financieros.

No obstante, y tal como se muestra en el ejercicio de simulación que a continuación se presenta, es posible mantener la propiedad de inmunización siempre y cuando *se ajuste* la composición de la cartera (mediante compras y enajenaciones de los bonos que la constituyen) *cada vez* que se produzca una alteración en los rendimientos de sus títulos como respuesta a las variaciones de las tasas de mercado, *de modo* que la duración de la cartera ajustada coincida precisamente con el resto del período planificador.

En nuestro caso se ha supuesto, por simplicidad, una cartera formada exclusivamente por las referencias B/11,60/91 y O/11,30/91 que mejor comportamiento tenían según obtuvimos en el epígrafe anterior. Se ha supuesto un horizonte planificador de seis años y se han simulado alteraciones aleatorias semestrales en los tipos de interés de mercado.

Sobre esta base se calculan las proporciones B1 y B2 en las que cada bono debe estar en la cartera tras cada cambio del tipo de interés, de manera que la duración resultante de la cartera ajustada iguale al resto del período planificador. Los ajustes en tales proporciones se hacen comprando y vendiendo las cantidades precisas de los bonos componentes.

El valor de los bonos en cada instante (V_1 y V_2 en Tabla 2) vendrá determinado por la actualización de sus cupones a los tipos de mercado actuales. El valor de la cartera en cada instante (V en Tabla 2) será la resultante de sumar a los valores así calculados de los bonos la renta de los cupones cuando éstos se cobren.

De este modo, tal y como se puede observar en la Tabla 2, al final de los seis años la cartera tiene un valor del 208,1639% que supone una tasa realizada de ganancia del 13% igual a la prometida inicialmente con una cartera formada por un 17,43% del B/11,60/91 y por un 82,57% de la O/11,30/91.

El problema asociado a este tipo de técnicas de inmunización dinámica es (obviando por supuesto la incursión en costes de transacción que pueden ser prohibitivos) la farragosidad de los cálculos a realizar. En

efecto, ante esta alteración de la pauta de rendimiento anual es preciso recalcular la duración de cada bono (Tabla 1) y a partir de ahí «disparar» el proceso de recomposición de la cartera.

Este «coste» en términos de tiempo y complejidad de los cálculos, cabe esperar pueda ser eludido si utilizamos los resultados obtenidos en el epígrafe 3 anterior.

En efecto, al obtener allí unas potentes aproximaciones lineales del comportamiento de las variaciones de la duración de los bonos ante variaciones en sus tasas internas de rendimiento provocadas en los momentos en los que se alteraban los tipos de referencias básicos (los de subasta de C.B.E.s y/o los de emisión de deuda pública) y, tomando en consideración el acortamiento del plazo hasta el vencimiento que en cada uno de tales momentos se producía, hemos obtenido una sencilla pauta de ajuste de la cartera dinámica: bastará con observar el montante de la variación en la tasa de rendimiento (dr) y la variación en el tiempo (dt) producida para obtener una buena estimación de la variación de la duración de cada bono (y de ahí en la duración promediada de la cartera) mediante la aplicación de los modelos lineales que se obtuvieron en el epígrafe 3. Una vez obtenidas, de esta manera, las duraciones esperadas de bonos y carteras tras los cambios en las variables exógenas, el proceso de ajuste (compras, ventas e incorporación de la renta del cupón) reproduce el proceso descrito anteriormente, pero habiendo eliminado el complejo recálculo de las duraciones de los títulos. Para ilustrar estas afirmaciones se reproducen las Tablas 3, 4 y 5 la secuencia de resultados obtenidos

TABLA 1

DURACION DE LOS BONOS QUE COMPONEN LA CARTERA

Período de tiempo (interval. de 6 meses)	Rendimiento anual	Duración B/11,60/91 (periodos 6 meses)	Duración O/11,3/91 (periodos 6 meses)
0	13,00	9,196954	12,59164
1	13,50	8,166572	11,48756
2	12,50	8,093368	11,98537
3	13,50	7,056658	10,82037
4	14,00	6,791326	10,99577
5	12,00	5,829317	10,24644
6	12,50	5,391199	10,28085
7	13,00	4,387442	9,235809
8	12,50	3,790614	9,264433
9	13,50	2,788949	8,204104
10	14,00	2	8,06727
11	13,50	1	7,085549
12	13,00	0	6,830238

TABLA 2
ESTRATEGIA DE INMUNIZACION

Periodo de tiempo	Precio del bono 11,6	Precio de la OB. 11,3	Proporción del bono 11,6	Proporción de la OB. 11,3	Valor bonos 11,6	Valor obs. 11,3	Valor de la cartera	N.º de bonos 11,6	N.º de obs. 11,3
(K)	(P1)	(P2)	(B1)	(B2)	(V1)	(V2)	(V)	(N1)	(N2)
0	94,4034303	90,77538609	0,1742838	0,825716228	17,42838	82,57162	100	0,184616	0,909626
1	92,7559957	88,41849212	0,344663	0,655337023	17,12423	80,42773	97,55197	0,362484	0,723032
2	96,7954885	93,72581839	0,5101153	0,489884711	35,0868	67,76678	115,2287	0,607259	0,602275
3	93,7028352	89,07912775	0,6246029	0,375397106	56,90186	53,65017	110,552	0,736916	0,465888
4	93,0070905	87,47506749	0,7125249	0,28747515	68,53841	40,7536	123,1048	0,943102	0,404567
5	98,7442811	96,4999734	0,8228139	0,177186103	93,12597	39,04075	132,1667	1,101316	0,242675
6	97,8567901	94,60923891	0,8754919	0,124508074	107,7712	22,95927	146,248	1,308432	0,192466
7	96,9875426	92,65924919	0,9319922	0,068007803	126,9016	17,83375	144,7353	1,39082	0,106229
8	98,4888889	95,13539377	0,9617477	0,038252319	136,9803	10,10617	164,4203	1,605571	0,066111
9	97,3816479	91,64593527	0,9921904	0,007809567	156,3531	6,058769	162,4119	1,654763	0,01384
10	97,8947368	90,73068138	1	0	161,9926	1,2557	182,5999	1,865268	0
11	98,9529504	92,74227573	1	0	184,5738	0	184,5738	1,865268	0
12	100	94,94339875	1	0	186,5268	0	208,1639	2,081639	0

NOTAS A LA TABLA 2

(1) Se constituye una cartera con una obligación a 10 años y cupón del 11,30 y un bono a cinco años con un cupón del 11,6. Duración igual al período planificador de seis años. A medida que pasa el tiempo estos bonos se compran y se venden para conseguir que la duración sea igual al tiempo restante en el período planificador.

(2) B1 y B2, son las proporciones de las carteras invertidas respectivamente en el bono 11,60 y en la obligación 11,30 para asegurar que la duración sea igual al tiempo restante del período planificador. N1 y N2, es el número de títulos de cada clase que, dados los precios P1 y P2, aseguran las proporciones B1 y B2.

con este algoritmo, para una simulación idéntica de tipos de interés a la realizada con anterioridad.

No obstante, se puede observar que el valor de la cartera al final del período planificador (131,89%) no implica una rentabilidad realizada igual a la prometida, con lo cual el proceso de inmunización siguiendo este procedimiento resulta incorrecto.

TABLA 3

DURACION DEL BONO B/11,60/91
CALCULADO CON EL MODELO LINEAL PROPUESTO

Fecha	t	dt	r	dr	dD	D
1.1.1	2160		13,00			1655
1.7.1	1980	-180,00	13,50	0,5	-110,8791	1544,121
1.1.2	1800	-180,00	12,50	-1	-97,9906	1446,13
1.7.2	1620	-180,00	13,50	1	-115,1752	1330,955
1.1.3	1440	-180,00	14,00	0,5	-110,8791	1220,076
1.7.3	1260	-180,00	12,00	-2	-89,3983	1130,678
1.1.4	1080	-180,00	12,50	0,5	-110,8791	1019,799
1.7.4	900	-180,00	13,00	0,5	-110,8791	908,9197
1.1.5	720	-180,00	12,50	-0,5	-102,2868	806,633
1.7.5	540	-180,00	13,50	1	-115,1752	691,4578
1.1.6	360	-180,00	14,00	0,5	-110,8791	580,5787
1.7.6	180	-180,00	13,50	-0,5	-102,2868	478,292
1.1.7	0	-180,00	13,00	-0,5	-102,2868	376,0052

TABLA 4

DURACION DE LA OBLIGACION O/11,30/91
CALCULADO CON EL MODELO LINEAL PROPUESTO

Fecha	t	dt	r	dr	dD	D
1.1.1	3600		13,00			2266,5
1.7.1	3420	-180,00	13,50	0,5	-86,2869	2180,213
1.1.2	3240	-180,00	12,50	-1	-17,2368	2162,976
1.7.2	3060	-180,00	13,50	1	-109,3036	2053,673
1.1.3	2880	-180,00	14,00	0,5	-86,2869	1967,386
1.7.3	2700	-180,00	12,00	-2	28,7966	1996,182
1.1.4	2520	-180,00	12,50	0,5	-86,2869	1909,896
1.7.4	2340	-180,00	13,00	0,5	-86,2969	1823,609
1.1.5	2160	-180,00	12,50	-0,5	-40,2535	1783,355
1.7.5	1980	-180,00	13,50	1	-109,3036	1674,052
1.1.6	1800	-180,00	14,00	0,5	-86,2869	1587,765
1.7.6	1620	-180,00	13,50	-0,5	-40,2535	1547,511
1.1.7	1440	-180,00	13,00	-0,5	-40,2535	1507,258

TABLA 5

ESTRATEGIA DE INMUNIZACION DINAMICA SEGUN EL MODELO LINEAL PROPUESTO

Período de tiempo	Precio del bono 11,6	Precio de la OB. 11,3	Proporción del bono 11,6	Proporción de la OB. 11,3	Valor bonos 11,6	Valor obs. 11,3	Valor de la cartera	N.º de bonos 11,6	N.º de obs. 11,3
(K)	(P1)	(P2)	(B1)	(B2)	(V1)	(V2)	(V)	(N1)	(N2)
0	94,4034302	90,77538609	0,1741619	0,825838103	17,41619	82,58381	100	0,184487	0,90976
1	92,7559957	88,41849211	0,3147549	0,685245133	29,1954	60,58834	90,26488	0,306302	0,699555
2	96,7954884	93,72581839	0,5063519	0,493648112	49,01258	46,26757	106,0913	0,55498	0,558776
3	93,7028352	89,07912775	0,6000583	0,399941651	56,22717	35,62645	92,45057	0,592039	0,415079
4	93,0070905	87,47506749	0,7057125	0,294287496	65,63627	25,74282	102,2713	0,776007	0,344066
5	98,744281	96,4999734	0,8505817	0,14941827	83,99008	14,41886	99,03922	0,853122	0,15335
6	97,8567901	94,60923891	0,9323655	0,067634502	91,23829	6,398849	108,6384	1,035091	0,077664
7	96,9875426	92,65924918	1,0097516	-0,009751622	97,93333	-0,903578	97,63451	1,016487	-0,010275
8	98,4888889	95,13539377	1,0886976	-0,08869764	107,2246	-8,438285	109,8357	1,214125	-0,102403
9	97,3816478	91,64593527	1,1541408	-0,154140763	112,3921	-14,12637	98,87219	1,171806	-0,166295
10	97,8947368	90,73068138	1,219005	-0,219004952	119,3342	-19,87047	124,8412	1,554547	-0,301341
11	98,9529503	92,74227573	1,2789811	-0,278981114	126,559	-25,87334	102,0817	1,319421	-0,307075
12	100	94,94339875	1,3323796	-0,332379582	133,238	-31,55725	131,8955	1,757348	-0,461742

NOTA A LA TABLA 5

B1 y B2, N1 y N2 tienen el mismo significado que en tabla 2.

Ello puede ser debido, claramente, a que los modelos estimados son de corto plazo (la muestra abarca un solo año) y probablemente los parámetros de largo plazo, de ser posible su estimación no deben ser constantes, incorporando algún componente estocástico o de dependencia funcional de los niveles de las variables t (tiempo hasta el vencimiento) y r (tasa de rendimiento interno).

Sin embargo, y dado el excelente nivel de significación detectado con los ajustes lineales propuestos, parece que para períodos planificadores «cortos», el método alternativo que se propone debe resultar satisfactorio.

A medida que los períodos de planificación (los «hábitats preferidos») del inversor se alarguen, el método sugerido debería ser tratado con cuidado, toda vez que es presumible la presencia de cambios estructurales que alteren los valores de los parámetros de los ajustes lineales estimados. En tales situaciones convendría, o bien «recalcular» el modelo para cada período de corto plazo, o bien encontrar alguna forma funcional que haga depender a los coeficientes de la ecuación estimada de los niveles (no de las variaciones) de las variables consideradas (tiempo y tasas de rendimiento) tratando, así, de incorporar el referido cambio estructural. Pero tal cometido excede las intenciones de este trabajo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han contrastado empíricamente las propiedades de la duración relativas a las variaciones en la estructura de tipos de interés, utilizando datos correspondientes a 1992 de cuatro referencias concretas del mercado español de Deuda Pública Anotada. Se ha observado que, salvo para la Obligación de cupón 12,25 emitida en 1990 y con vto. el 25.03.2000, el comportamiento de las otras tres referencias no difiere significativamente del comportamiento teórico esperado.

Asimismo se han ajustado con sendos modelos lineales por mínimos cuadrados ordinarios, las primeras diferencias de las variables: duración, tasa de rendimiento y tiempo hasta el vencimiento, obteniéndose, en dos de los casos, ajustes extraordinariamente robustos.

Tales características han sugerido la utilización de estas estimaciones para simular la estrategia de inmunización dinámica de una cartera sin necesidad de recalcular la duración de sus bonos componentes ante cada alteración aleatoria de la estructura temporal de tipos de interés.

La menor calidad, no obstante, de los resultados así obtenidos, parece sugerir la inadecuación de nuestro modelo a estrategias de inmuniza-

ción de largo plazo, toda vez que la constancia de los coeficientes estimados ignora la posibilidad de cambios estructurales en plazos más dilatados.

BIBLIOGRAFIA

- BABCOCK, G. (1984): «Duration as a Link between Yield and Value», *Journal of Portfolio Management*, verano, págs. 55-65.
- BIERWAG, G. (1991): *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de tipo de interés*, Madrid, Alianza Economía y Finanzas.
- BIERWAG, G.; KAUFMAN, G., and TOEVS, A. (1983a): «Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management», *Financial Analyst's Journal*, julio-agosto, págs. 2-23.
- BIERWAG, G.; KAUFMAN, G., and TOEVS, A. (1983b): «Recent Developments in Bond Portfolio Immunization Strategies», *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, editado por G. Kaufman, G. Bierwag y A. Toevs, Greenwich, Conn: JAI Press.
- CULBERSTON, J. (1957): «The Term Structure of Interest Rates», *Quarterly Journal of Economics*, noviembre.
- FISHER, I. (1930): *The Theory of Interest*, New York, MacMillan.
- FISHER, I., and WEIL, R. (1971): «Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations and Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies», *Journal of Business*, octubre.
- HINCKS, J. R. (1946): *Value and Capital*, Oxford, Clarendon Press.
- MACAULAY, F. R. (1938): *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bonds yields and stock prices in U.S. since 1856*, New York, National Bureau of Economic Research.
- MODIGLIANI, F., and SUCH, R. (1967): «Debt Management and the Term Structure of Interest Rate: An Empirical Analysis of Recent Experience», *Journal of Political Economy*, agosto.
- REDINGTON, F. M. (1952): «Review of the Principle of life office valuations», *Journal of Institute of Actuaries*, 18, págs. 286-340.
- SAMUELSON, P. A. (1945): «The effect of interest rates increases of the banking system», *American Economic Review*, marzo, págs. 16-27.