REVISTA ESPAÑOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. XXII, n. 71
abril-junio 1992
pp. 489-501

Trinidad
Sancho Insa
Catedrática de E.U. de Economía Financiera y Contabilidad. Departamento de Técnicas Empresariales de la Universidad de Barcelona

VIDA MATEMATICA Y «DURATION» DE UN EMPRESTITO CON AMORTIZACION PERIODICA Y CON SORTEO

Los empréstitos cuya amortización se efectúa periódicamente y mediante sorteo llevan asociada una característica de aleatoriedad en cuanto a que no se conoce con certeza cuándo un título va a ser amortizado.

La mayoría de los indicadores de la duración de una operación financiera, ya sea aleatorio o no el plazo de la misma, incorporan un tanto de valoración financiera. Cualquier indicador deberá respetar las siguientes propiedades en función del tanto de valoración: *a)* deben ser monótonos, y *b)* deben pertenecer a un intervalo finito.

La Matemática Financiera, tradicionalmente, utiliza como indicador, aceptablemente fiable, del período de vida que puede tener un título, que después de un sorteo dado todavía no se ha amortizado, a la vida matemática de un título.

En el presente trabajo, aparte de transcribir el concepto de vida matemática, se intenta recuperar un concepto más general de la vida matemática, expuesto por el profesor GIL PELÁEZ (1), así como introducir el concepto de «*Duration*» de una operación financiera aleatoria, aplicada a una obligación de un empréstito que se amortice mediante sorteo. En todos ellos se comprobará el cumplimiento de las propiedades expuestas anteriormente, con el fin de establecer su validez como indicador de la duración de una operación financiera.

1. Simbología

C, nominal de un título.

N, número de títulos emitidos.

C_a^r, precio de amortización de un título correspondiente al período r-ésimo.

$Cu^r = C \cdot I_m^r$, cupón correspondiente al período r-ésimo (siendo I_m^r el tanto efectivo de interés del período).

n, número de períodos de amortización.

v_r, número de títulos que están en circulación después del r-ésimo sorteo.

μ_r, total de títulos amortizados después del r-ésimo sorteo.

σ_r, títulos que se han amortizado en el sorteo r-ésimo.

${}_{d/}q_r$, probabilidad que un título vivo tras el sorteo d-ésimo se amortice en el sorteo $d + r$.

V_d, valor del empréstito tras el sorteo d-ésimo.

$V_d^{(1)}$, valor probable de un título vivo tras el sorteo d-ésimo.

2. Vida matemática

E. DEL VECCHIO (2) considera que la vida matemática es la «duración del riesgo asociado a una obligación, o número crítico». Para L. GIL PELÁEZ (3) la vida matemática es «el tiempo, z, que habría que transcurrir para que sea financieramente equivalente, la amortización en bloque, en el diferimiento $d + z$ de todas las obligaciones, v_d, vivas, con la amortiza-

(1) GIL PELÁEZ, L.: «Sobre una generalización del concepto de vida matemática de una obligación», *De Economía*, n. 90, vol. XIX, enero-junio 1966, pp. 83-88.

(2) DEL VECCHIO, E.: «Sulla generalizzazione della formula di Achard e del rischio matematico di un'obbligazione», *Giornale di Matematica Finanziaria*, año XVII, vol. V, 1935, pp. 30-31.

(3) *Op. cit.*, p. 85.

ción realizada según el cuadro de amortización del empréstito». Para este autor, desempeña «un papel similar al de un parámetro de posición de una distribución estadística, en cuanto que representa un valor medio, pero tiene, además, la ventaja de recoger la influencia de las características financieras de la contraprestación al operar con valores descontados a un tanto de mercado, que suele ser reflejo de la situación financiera del mercado de capitales» (4).

Así pues, la vida matemática es el diferimiento medio del conjunto de capitales formado por todas las cuotas de capital pendientes de pago, valoradas a un tanto de mercado; es decir, el diferimiento en el que, respetando las condiciones del empréstito, se amortizarían de golpe todos los títulos en circulación.

Si después del sorteo d-ésimo quedan pendientes de amortizar v_d títulos, repartidos durante los $n-d$ sorteos que faltan para cancelar el empréstito, se puede plantear la siguiente operación:

$$\left\{(C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s} \cdot d+s)\right\}_{s=1,2,\ldots,n-d} \sim \left\{\left[\sum_{s=1}^{n-d} C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s}\ ,\ d+z\right]\right\}$$

cuya ley de valoración, representada por tanto efectivo de interés I_m^* por período de amortización, no tiene por qué coincidir con la inicialmente pactada en la emisión.

Formalmente, la vida matemática será el plazo temporal z (5) que verifique la igualdad siguiente:

$$\left[\sum_{s=1}^{n-d} C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s}\right] \cdot (1+I_m^*)^{-z} = \sum_{s=1}^{n-d} C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s} \cdot (1+I_m^*)^{-s}$$

Así tendremos que

$$z = \frac{\ln\left[\sum_{s=1}^{n-d} C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s} \cdot (1+I_m^*)^{-s}\right] - \ln\left[\sum_{s=1}^{n-d} C_a^{d+s} \cdot \sigma_{d+s}\right]}{-\ln(1+I_m^*)}$$

Al ser un vencimiento medio, la vida matemática tendrá las propiedades siguientes (6):

— Es monótona decreciente respecto al tanto de interés de valoración.

(4) *Op. cit.*, p. 83.

(5) z vendrá expresado en períodos de amortización.

(6) Un estudio del comportamiento del vencimiento medio respecto a la ley financiera de valoración puede verse en SANCHO, T.: «Indicadores de la duración de una operación financiera», *LX Congreso SIEC*, julio 1990, Barcelona.

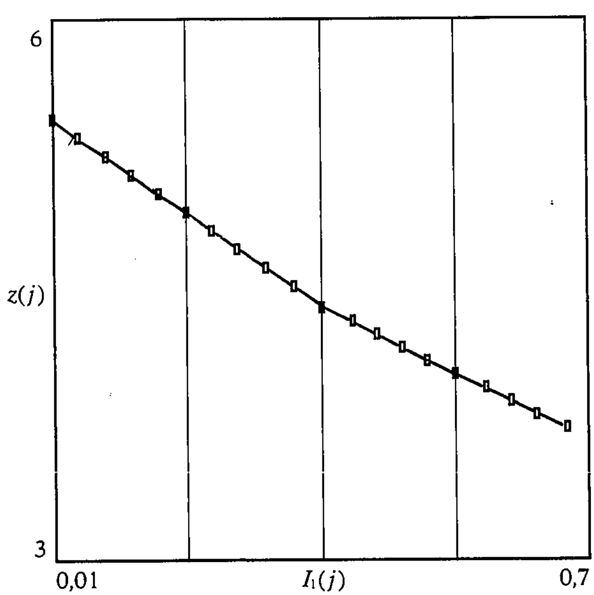
— Cuando el tanto de interés tiende a 0, la vida matemática tiende al vencimiento medio aritmético de los diferimientos ponderados por las cuotas de capital, $\dfrac{\sum_{s=1}^{n-d} \sigma_{d+s} \cdot C_a^{d+s} \cdot s}{\sum_{s=1}^{n-d} \sigma_{d+s} \cdot C_a^{d+s}}$

— Cuando el tanto de interés tiende a infinito, la vida matemática tiende al primero de los diferimientos, $d + 1$.

Podemos ver que la vida matemática es un indicador monótono decreciente respecto al tanto de valoración y que está acotado por el primero de los diferimientos, $d + 1$, y el vencimiento medio aritmético, $\dfrac{\sum_{s=1}^{n-d} \sigma_{d+s} \cdot C_a^{d+s} \cdot s}{\sum_{s=1}^{n-d} \sigma_{d+s} \cdot C_a^{d+s}}$ por tanto, cumple las dos propiedades requeridas para un indicador temporal.

GRÁFICA

COMPORTAMIENTO DE Z RESPECTO AL TANTO DE VALORACION



$z(j)$	$I_1(j)$
5,48	0,01
5,35	0,0445
5,21	0,079
5,08	0,1135
4,96	0,148
4,85	0,1825
4,74	0,217
4,63	0,2515
4,53	0,286
4,44	0,3205
4,35	0,355
4,27	0,3895
4,19	0,424
4,12	0,4585
4,05	0,493
3,98	0,5275
3,92	0,562
3,86	0,5965
3,8	0,631
3,75	0,6655

FIG. 1.—Comportamiento de la vida matemática para un intervalo de tantos de interés de valoración [1%, 70%].

3. Vida matemática generalizada

Asumiendo el hecho de que la amortización es un suceso aleatorio, L. GIL PELÁEZ (7) introduce y define un nuevo concepto de vida matemática de la siguiente forma: «la vida matemática, o financiera, de una prestación de duración aleatoria es la duración cierta que ha de tener una prestación de análogas características formales que aquélla, para que ambas sean financieramente equivalentes». Para el cálculo de esa nueva vida matemática define una variable aleatoria que denomina «valor en d de los cobros derivados del título vivo en d», teniendo en cuenta que puede amortizarse en cualquiera de los sorteos siguientes.

Para $r = 1,2,...,n - d$, definimos V_d^r, valor en d de los cobros derivados de la titularidad de la obligación desde el sorteo $d + 1$ hasta el momento de su amortización, $d + r$.

$$\begin{array}{cccccc} V_d^r & C \cdot I_m^{d+1} & C \cdot I_m^{d+2} & & C \cdot I_m^{d+r-1} & C \cdot I_m^{d+r} + C_a^{d+r} \\ |\text{———} & |\text{———} & |\text{———} & // & \text{———}| & \text{———}| \\ d & d+1 & d+2 & & d+r-1 & d+r \end{array}$$

$$V_d^r = \sum_{s=1}^{r} C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1 + I_m^*)^{-s} + C_a^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r}$$

La probabilidad asociada a V_d^r es ${}_{d}\sqrt{q_r} = \frac{\sigma_{d+r}}{v_d}$, probabilidad que un título vivo tras el sorteo d-ésimo sea amortizado en el sorteo $d + r$.

La «vida matemática generalizada» de GIL PELÁEZ será el espacio temporal z' que verifique la igualdad

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{z'} C \cdot I_m^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r} + C_a^{d+z'} \cdot (1 + I_m^*)^{-z'} = \sum_{r=1}^{n-d} {}_{d}\sqrt{q_r} \cdot V_d^r = \\ &= \sum_{r=1}^{n-d} \frac{\sigma_{d+r}}{v_d} \cdot \left[\sum_{s=1}^{r} C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1 + I_m^*)^{-s} + C_a^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r} \right] = V_d^{(1)} \end{aligned} \qquad [1]$$

La complejidad de la ecuación [1] hace muy difícil estudiar su monotonía; para ello ha sido más fácil encontrar un contraejemplo que no la respete. Se ha diseñado un empréstito que se amortiza mediante sorteo, amortizando el mismo número de títulos en cada sorteo, con cupón constante pero precio de amortización variable linealmente (8). Los tan-

(7) *Op. cit.*, p. 87.

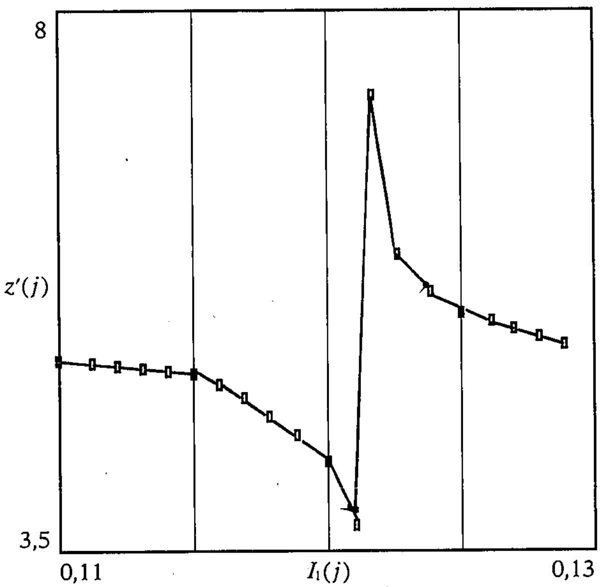
(8) Las características del mencionado empréstito son: nominal del título, 10.000 pesetas; número de títulos emitidos, 100.000; duración, 10 años; amortización anual, cupón, 1.200 ptas/título vencido y anual; precio de amortización variable linealmente según la relación $C_a^r = C + 30 \cdot (r - 1)$.

tos de valoración se han seleccionado en el intervalo [11%, 12,9%], con un total de 20 valores.

Los resultados obtenidos de la vida matemática «generalizada» presentan una asíntota entre los tantos de interés de valoración 12% y 12,1%, tal como puede apreciarse en la gráfica siguiente; este comportamiento vulnera la propiedad de monotonía, así como el de ser un valor acotado en un intervalo finito.

GRÁFICA

COMPORTAMIENTO DE Z' RESPECTO AL TANTO DE VALORACION



$z'(j)$	$I_1(j)$
4,96	0,11
4,95	0,111
4,93	0,112
4,91	0,113
4,89	0,114
4,85	0,115
4,81	0,116
4,76	0,117
4,68	0,118
4,55	0,119
4,3	0,12
3,65	0,121
7,39	0,122
6,07	0,123
5,66	0,124
5,47	0,125
5,37	0,126
5,3	0,127
5,25	0,128
5,22	0,129

FIG. 2.—Comportamiento de la vida matemática generalizada para el intervalo de tantos de interés de valoración [11%, 12,9%].

3.1. *Relación entre la vida matemática y la «vida matemática generalizada»*

Si se analiza la parte derecha de la igualdad anterior [1], el segundo sumando es el valor en d de las cuotas de capital, A_{d+r}; éste puede sustituirse por su equivalente en la vida matemática z. La igualdad quedará en función de z y de z'.

$$\sum_{r=1}^{z'} C \cdot I_m^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r} + C_a^{d+z'} \cdot (1 + I_m^*)^{-z'} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-d} \frac{\sigma_s}{v_d} \cdot \sum_{s=1}^{r} C \cdot I_m^{d+s}(1 + I_m^*)^{-s} + \frac{1}{v_d} \cdot \left[\sum_{r=1}^{n-d} C_a^{d+r}\right] \cdot \sigma_{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-z}$$

$$C_a^{d+z'} \cdot (1 + I_m^*)^{-z'} - \frac{1}{v_d} \cdot \left[\sum_{r=1}^{n-d} C_a^{d+r} \cdot \sigma_{d+r}\right] \cdot (1 + I_m^*)^{-z} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-d} \frac{\sigma_{d+r}}{v_d} \cdot \sum_{s=1}^{r} C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1 + I_m^*)^{-s} - \sum_{r=1}^{z'} C \cdot I_m^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r}$$

si multiplicamos toda la igualdad por v_d tendremos:

$$v_d \cdot C_a^{d+z'} \cdot (1 + I_m^*)^{-z'} - \left[\sum_{r=1}^{n-d} C_a^{d+r} \cdot \sigma_{d+r}\right] \cdot (1 + I_m^*)^{-z} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-d} \left[\sigma_{d+r} \cdot \sum_{s=1}^{r} C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1 + I_m^*)^{-s} - v_d \cdot \sum_{r=1}^{z'} C \cdot I_m^{d+r} \cdot (1 + I_m^*)^{-r}\right]$$

$$v_d \cdot C_a^{d+z'} \cdot (1 + I_m^*)^{-z'} - \left[\sum_{r=1}^{n-d} C_a^{d+r} \cdot \sigma_{d+r}\right] \cdot (1 + I_m^*)^{-z} \gtreqless 0$$

de donde se puede obtener la relación

$$\frac{\ln\left(v_d \cdot C_a^{d+z'}\right) - \ln\left(\sum_{r=1}^{n-d} C_a^{d+r} \cdot \sigma_{d+r}\right)}{\ln(1 + I_m^*)} \gtreqless z' - z$$

Si el empréstito se amortiza con prima de amortización constante, es decir, $C_a^r = C_a \; \forall r \in \{1,2,\ldots,n\}$, entonces tendremos que $z' - z = 0$, con lo cual la vida matemática y la «vida matemática generalizada» coincidirán.

4. «Duration» de una operación financiera cierta

«*Duration*» es una expresión inglesa cuya traducción a nuestro lenguaje no se ha efectuado hasta el momento; sin embargo, autores italianos la han traducido por «duración media financiera» (9).

(9) *Vid.* CASTAGNOLI, E.: *Indicatori di durata per operazioni finanziarie certe*, Istituto di Matematica Finanziaria «E. Levi», Parma, n. 12, 1983, p. 5.

W. SHARPE (10) la define como «una media ponderada de los diferimientos, utilizando como pesos de ponderación el valor actual de las cuantías asociadas a dichos diferimientos».

Consideremos una operación financiera cierta,

$$\{(C,0)\} \sim \{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$$

en la que I_1 es el tanto de interés anual de la ley financiera de la operación.

El vencimiento medio aritmético del conjunto de contraprestaciones será la media aritmética de los diferimientos ponderados por las respectivas cuantías:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{r=1}^{n} T_r \cdot C_r}{\sum_{r=1}^{n} C_r}$$

De la expresión anterior se puede observar que: *a)* los diferimientos T_r son magnitudes temporales referidas a una misma unidad de medida, y *b)* las cuantías C_r son magnitudes monetarias cuya unidad de medida será la unidad monetaria del año T_r, con lo cual los coeficientes de ponderación del vencimiento medio aritmético no son magnitudes monetarias homogéneas en el tiempo.

Si se desean expresar todas las cuantías en unidades monetarias de un año base, en concreto el origen de la operación, se deberá introducir la valoración financiera con el fin de obtener coeficientes de ponderación expresados respecto a un mismo año base.

Así, $\forall r \in \{1,2,\dots,n\}$, C_r^0 será la cuantía asociada al diferimiento T_r, pero expresada en unidades monetarias del origen de la operación.

$$\forall r \in \{1,2,\dots,n\},\ C_r^0 = C_r \cdot (1 + I_1)^{-T_r}$$

El vencimiento medio aritmético, una vez se han corregido los coeficientes de ponderación, será:

$$\bar{T}^* = \frac{\sum_{r=1}^{n} T_r \cdot C_r^0}{\sum_{r=1}^{n} C_r^0} = \frac{\sum_{r=1}^{n} T_r \cdot C_r \cdot (1 + I_1)^{-T_r}}{\sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1 + I_1)^{-T_r}}$$

(10) SHARPE, W.: *Investment*, Prentice-Hall, 1985, p. 85.

La expresión dada por MACAULEY (11) como «*Duration*» es la siguiente:

$$D = \frac{\sum_{r=1}^{n} T_r \cdot C_r \cdot (1 + Y)^{-T_r}}{V}$$

siendo Y la «tasa anual interna» de rentabilidad de la inversión, V el valor de todos los cobros generados por un bono, o título de renta fija en el que se ha efectuado la inversión, C_r los cobros procedentes de la inversión y T_r los diferimientos en que se hacen efectivos dichos cobros.

Si tenemos en cuenta que Y es el tanto efectivo anual de interés resultante de la operación y que V, calculado al tanto de interés resultante de la operación, deberá coincidir con la prestación realizada en el origen, entonces $Y \equiv I_1$ y $V \equiv C = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1 + Y)^{-T_r}$, de donde se obtiene que $\bar{T}^*$ coincide con D, cuantitativa y cualitativamente.

Si tenemos en cuenta que Y es el tanto efectivo anual de interés resultante de la operación y que V, calculado al tanto de interés resultante de la operación, deberá coincidir con la prestación realizada en el origen, entonces $Y \equiv I_1$ y $V \equiv C = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1 + Y)^{-T_r}$, de donde se obtiene que $\bar{T}^*$ coincide con D, cuantitativa y cualitativamente.

Se podría definir la «*Duration*» como el vencimiento medio aritmético de los diferimientos ponderados por sus respectivas cuantías, expresadas financieramente en unidades monetarias del origen de la operación.

Las propiedades de D son (12):

— Es una función monótona decreciente respecto al tanto de valoración.

— Para cualquier tanto de valoración toma valores inferiores al diferimiento medio del conjunto de las contraprestaciones.

— Está acotado entre el primero de los diferimientos y el vencimiento medio aritmético del conjunto de las contraprestaciones.

— Si el tanto de valoración tiende a cero, D tiende al vencimiento medio aritmético del conjunto de contraprestaciones, $\bar{T}$, y si el tanto de valoración tiende a infinito, D tiende a T_1.

(11) La fórmula de la «*Duration*» dada por MACAULEY está también transcrita en HAUGEN, P. A.: *Modern Investment Theory*, Prentice-Hall, 1986, p. 332.

(12) Las propiedades de D pueden verse en SANCHO, T.: *op. cit.*

5. «Duration» de una operación financiera aleatoria

Sea $\{(C,0)\} \sim \{(C_{d+\xi}, T_{d+\xi})\}_{\xi\epsilon\{d+1,d+2,\dots,n\}}$ una operación financiera discreta aleatoria respecto al plazo de la misma y de la cual se sabe el plazo máximo que puede alcanzar, $\xi \leq n$, e I_1 el tanto efectivo de interés anual asociado a la ley financiera pactada en la operación.

Para cada valor de ξ, la contraprestación será un suceso de la variable aleatoria representado por un conjunto finito de capitales financieros, para $\xi = r, \{(C_{d+s}, T_{d+s})\}_{s\leq r}$.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & C_{d+1} & & C_{d+2} & & C_{d+r-1} & & C_{d+r} \\ | & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{——} \; // \; \text{——} & | & \text{———} & | \\ T_d & & T_{d+1} & & T_{d+2} & & T_{d+r-1} & & T_{d+r} \end{array}$$

El valor en d de ese conjunto de capitales será:

$$V_d^r = \sum_{s=1}^{r} C_{d+s} \cdot (1 + I_1)^{-(T_{d+s} - T_d)}$$

Y su probabilidad asociada P_{dr}.

El valor esperado en d de la variable aleatoria se definirá como su esperanza matemática:

$$V_d = E(\xi) = \sum_{r=1}^{n-d} V_d^r \cdot P_{dr}$$

El cociente entre cada uno de los valores V_d^r y su esperanza matemática, V_d

$$\frac{V_d^r}{V_d} \; \forall r = d+1, \dots, n$$

indicará si el conjunto de capitales correspondiente a la distribución temporal $\{T_{d+1}, T_{d+2}, \dots, T_{d+r}\}$ tiene un valor en d, V_d^r, superior (inferior) al valor medio, V_d.

Para tener en cuenta esta relación se define una nueva probabilidad que corrige P_{dr},

$$\forall r \epsilon \{d+1, d+2, \dots, n\}, P'_{dr} = P_{dr} \cdot \frac{V_d^r}{V_d} \text{ (13)}$$

de forma que si $\frac{V_d^r}{V_d} > 1$, $P'_{dr} > P_{dr}$ y si $\frac{V_d^r}{V_d} < 1$, $P'_{dr} < P_{dr}$. Esta corrección de las probabilidades podría interpretarse como una adecuación de éstas al

(13) Puede comprobarse fácilmente que $\sum_{r=1}^{n-d} P'_{dr} = 1$.

peso específico que el conjunto de capitales, con valor asociado V_d^r, tiene dentro del cómputo de su valor medio.

La «*duration*» para cada uno de los sucesos de la variable aleatoria será:

$$\forall r \epsilon \{d+1, d+2, \ldots, n\}, D_{dr} = \frac{\sum_{s=1}^{r} T_{d+s} \cdot C_{d+s} \cdot (1+I_1)^{-(T_{d+s}-T_d)}}{\sum_{s=1}^{r} C_{d+s} \cdot (1+I_1)^{-(T_{d+s}-T_d)}}$$

siendo la probabilidad asociada P'_{dr}.

Se define la «*Duration*» media del conjunto de capitales financieros aleatorios a la esperanza matemática de D_{dr},

$$D_d = \sum_{r=1}^{n-d} D_{dr} \cdot P'_{dr}$$

Las propiedades de este indicador son (14):

— Si las probabilidades son independientes del tanto de valoración, D_d es monótona decreciente respecto al tanto de valoración.

— Si el tanto de valoración tiende a infinito, D_d tiende al primero de los diferimientos, $d+1$, y si el tanto de valoración tiende a cero, D_d tiende al vencimiento medio aritmético de la variable aleatoria.

6. «Duration» de un título de un empréstito que se amortiza mediante sorteo

Una obligación que está viva después del d-ésimo sorteo tiene una duración de vida aleatoria. En este caso se podrá aplicar el concepto de «*duration*» media a una obligación viva en d.

Para ello bastará realizar las siguientes identificaciones:

1) P_{dr} será $d^{\sqrt{q_r}} = \frac{\sigma_{d+s}}{v_d}$, la probabilidad de que la obligación se amortice en el sorteo $d+r$.
2) V_d será el valor probable de un título tras el sorteo d, $V_d^{(1)}$.
3) Los capitales financieros serán los cupones, y el precio de amortización de la obligación.

$$\forall r \epsilon \{d+1, d+2, \ldots, n\} \{[C \cdot I_m^{d+s}, (d+s) \cdot p]\}_{s=1,2,\ldots,r} \cup \{[C_a^{d+r}, (d+r) \cdot p]\}$$

(14) SALINELLI, E., hace un estudio detallado de las propiedades en «Alcune osservazioni su indici di durata per operazioni finanziarie di scadenza finale aleatoria», *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali*, año 13, fascículo 1º-2º, 1991, pp. 87-98.

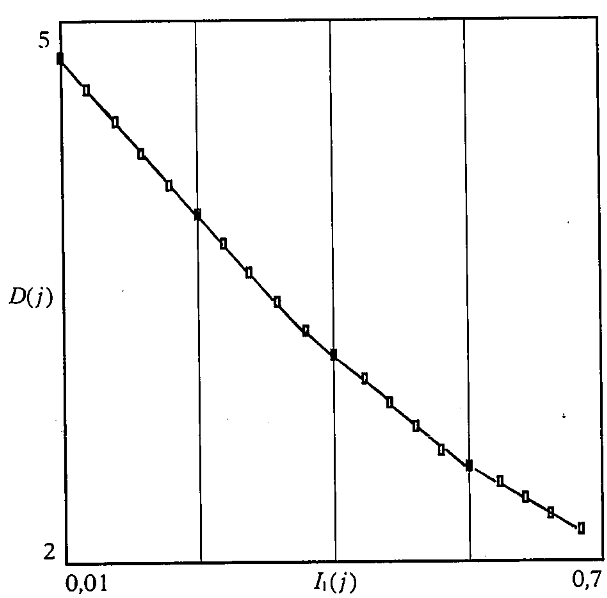
$$\begin{array}{cccccc} & C \cdot I_m^{d+1} & C \cdot I_m^{d+1} & & C \cdot I_m^{d+r-1} & C \cdot I_m^{d+r} + C_a^{d+r} \\ |\text{———} & |\text{———} & |\text{———} & // & \text{———}| & \text{———}| \\ d \cdot p & (d+1) \cdot p & (d+2) \cdot p & & (d+r-1) \cdot p & (d+r) \cdot p \end{array}$$

4) P'_{dr} será $d^{\sqrt{q_r}} \cdot \dfrac{V_d^r}{V_d^{(1)}} = \dfrac{\sigma_{d+r}}{\nu_d} \cdot \dfrac{V_d^r}{V_d^{(1)}}$

5) I_1 será el tanto efectivo anual de valoración del mercado, cuyo tanto efectivo por período de amortizacin se simbolizará por I_m^*.

GRÁFICA

COMPORTAMIENTO DE D RESPECTO AL TANTO DE VALORACION



$D(j)$	$I_1(j)$
4,84	0,01
4,58	0,0445
4,34	0,079
4,12	0,1135
3,91	0,148
3,72	0,1825
3,54	0,217
3,38	0,2515
3,24	0,286
3,1	0,3205
2,98	0,355
2,87	0,3895
2,77	0,424
2,68	0,4585
2,59	0,493
2,51	0,5275
2,44	0,562
2,38	0,5965
2,32	0,631
2,26	0,6655

FIG. 3.—Comportamiento de la «*duration*» de un título que se amortiza mediante sorteo para el intervalo de tantos de interés [1%, 70%].

La «*duration*» media de una obligación viva tras el sorteo d-ésimo será:

$$D_d = p \cdot \sum_{r=1}^{n-d} \left[\frac{\sum_{s=1}^{r} (d+s) \cdot C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1+I_m^*)^{-s} + (d+r) \cdot C_a^{d+r} \cdot (1+I_m^*)^{-r}}{V_d^r} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{\sigma_{d+r}}{v_d} \cdot \frac{V_d^r}{V_d^{(1)}} = \frac{p}{V_d} \cdot$$

$$\cdot \sum_{r=1}^{n-d} \left[\sum_{s=1}^{r} (d+s) \cdot C \cdot I_m^{d+s} \cdot (1+I_m^*)^{-s} + (d+r) \cdot C_a^{d+r} \cdot (1+I_m^*)^{-r} \right] \cdot \sigma_{d+r}$$

BIBLIOGRAFIA

CASTAGNOLI, E.: «Indicatori di durata per operazioni finanziarie certe», *Istituto di Matematica Finanziaria E. Levi,* Parma, n. 12, 1983, p. 5.

DEL VECCHIO, E.: «Sulla generalizzazione della formula di Achard e del rischo matematico di un'obbligazione», *Giornale di Matematica Finanziaria,* año XVII, vol. V, 1935, pp. 30-31.

GIL PELÁEZ, L.: «Sobre una generalización del concepto de vida matemática de una obligación», *De Economía,* n. 90, vol. XIX, enero-julio 1966, pp. 83-88.

HAUGEN, P. A.: *Modern Investment Theory,* Prentice-Hall, 1986, p. 332.

SALINELLI, E.: «Alcune osservazioni su indici di durata per operazioni finanziarie di scandenza finale aleatoria», *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali,* año 12, fascículo 1º-2º, 1991, pp. 87-98.

SANCHO INSA, T.: «Indicadores de la duración de una operación financiera», *LX Congreso SIEC,* julio 1990, Barcelona.

SHARPE, W.: *Investment,* Prentice-Hall, 1985.