REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. XIX, n. 60
1989
pp. 701-718

Gonzalo Rubio Irigoyen
Departamento de Análisis Económico Universidad del País Vasco e Instituto de Economía Pública

UNA INTRODUCCION A LOS PROCESOS DE ITO: EL MODELO DE VALORACION DE ACTIVOS DE CAPITAL COMO CONDICION SUFICIENTE PARA LA VALORACION DE OPCIONES

1. INTRODUCCION

El objetivo principal de este trabajo es demostrar cómo el Modelo de Valoración de Activos de Capital (C.A.P.M.) bajo condiciones en las que los agentes pueden contratar activos financieros en cada instante (contratación continua) es una condición suficiente para obtener la fórmula de valoración de opciones propuesta por Black y Scholes (1973).

El utilizar un supuesto de contratación continua, aun facilitando en gran medida conceptualizaciones teóricas sobre la valoración de activos financieros, tiene el inconveniente de necesitar un aparato matemático complejo. Por esta razón, un objetivo secundario de este trabajo consiste en presentar una introducción intuitiva a los procesos estocásticos continuos de Markov. Dentro de dichos procesos nos centraremos en una de las dos grandes áreas que los componen, como son los llamados procesos de Ito.

Diversos autores han analizado la relación existente entre el tradicional C.A.P.M. y la valoración de opciones. Debe quedar claro que los modelos de valoración de opciones explican las relaciones de precios entre unos activos financieros muy particulares y que están relacionados entre ellos mediante contratos explícitos. A su vez, el C.A.P.M. explica las relaciones de precios entre todos los activos financieros. En definitiva, el C.A.P.M. debe implicar, al menos conceptualmente, el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes, aunque, por otro lado, la relación inversa no sea cierta.

El trabajo más conocido sobre la conexión entre los modelos tradicionales de valoración de opciones se debe a Rubinstein (1976). Lo interesante de su trabajo consiste en obtener la fórmula de valoración de opciones de Black y Scholes bajo condiciones de contratación discreta.

Como hemos señalado anteriormente, existe un cierto tipo de comportamiento en las variables económicas que tienen especial relevancia teórica y que solamente es posible bajo contratación continua. A modo de ejemplo, cabe señalar que el punto crucial en el desarrollo de la teoría de opciones de Black y Scholes fue observar cómo comprando acciones y vendiendo opciones de compra en dichas acciones se puede formar una posición de cobertura que no presenta ningún tipo de riesgo para «pequeños» cambios en el precio de las acciones. Para que dicha posición siga siendo equivalente a una posición sin riesgo es necesario ajustar las proporciones en acciones y opciones continuamente al ir variando el precio de la acción. Este procedimiento requiere, lógicamente, un supuesto de contratación continua.

Rubinstein (1976), al partir de supuestos de contratación discreta, se vio en la necesidad de añadir estructura teórica adicional para solventar la imposibilidad de usar la posición de cobertura. Asimismo, suponer normalidad en las rentabilidades de los activos financieros o pensar en términos de un único período no resulta consistente con las características de las opciones. Rubinstein (1976) supera dichas dificultades imponiendo una función de utilidad isoelástica y, más concretamente, una función de utilidad logarítmica (1). Tal como señala el autor, la fun-

(1) Una función de utilidad iso-elástica se caracteriza por tener aversión absoluta al riesgo decreciente y aversión relativa al riesgo constante. El ejemplo típico es:

$$u(C_t)=\frac{1}{1-b}\,C_t^{1-b}$$

ción de utilidad logarítmica tiene la característica de que las carteras óptimas son escogidas por los agentes económicos independientemente de las oportunidades que tengan dichos agentes para revisarlas en el futuro. Esto es cierto, incluso si las oportunidades de ajuste en la combinación óptima de activos es continua.

En el presente trabajo volvemos al supuesto de contratación continua. En este caso, lo que necesitamos para que nuestra prueba de suficiencia sea válida es que el C.A.P.M. sea consistente con condiciones de contratación continua. Afortunadamente, Merton (1972) y Garman (1977) demuestran que el C.A.P.M. tiene la misma forma familiar de la contratación discreta (2):

$$\mu_i = rf + (\mu_m - rf)\ \beta_i \qquad [1]$$

donde μ_i es el rendimiento instantáneo esperado por el activo con riesgo i, μ_m es el rendimiento instantáneo esperado por la cartera de mercado m, y rf es la tasa instantánea de rentabilidad sin riesgo. Como en su forma tradicional,

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}\,(r_i,\ r_m)}{\mathrm{var}\,(r_m)} \qquad [2]$$

donde β_i es el riesgo no diversificable del activo i, $cov(r_i,\ r_m)$ es la covarianza entre las tasas instantáneas de rendimiento del activo i y de la cartera de mercado m, y var (r_m) es la varianza del rendimiento instantáneo de dicha cartera de mercado.

La parte central del presente trabajo demuestra cómo la expresión [1] es condición suficiente para obtener la fórmula de valoración de opciones de Black y Scholes.

---

donde b es el coeficiente de aversión relativa al riesgo,

$$b = -C_t\ u''\ (C_t)/u'(C_t)$$

En el caso límite de $b=1$, tenemos una función de utilidad logarítmica,

$$u(t) = \log\ C_t$$

(2) Supone un conjunto de oportunidades de inversión constante. En otras palabras, no es necesario demandar activos para «cubrirse» contra movimientos desfavorables en dicho conjunto de oportunidades.

2. PROCESOS DE ITO Y LA DINAMICA DE LOS PRECIOS DE LOS ACTIVOS FINANCIEROS

El proceso dinámico de los cambios en los precios de los activos financieros puede caracterizarse por procesos continuos de Markov. Es conocido que podemos caracterizar los procesos de Markov como aquellos procesos en los que su elemento estocástico es independiente en el tiempo.

Representemos dichos procesos como una función aleatoria de 2 variables, P y t, donde P representa la variable que estamos analizando, y t es el tiempo. La característica típica en los procesos de Markov viene definida por la relación entre los valores de P en diversos momentos de tiempo.

Si utilizamos el conocido concepto de la «probabilidad de transición» podemos fácilmente definir los procesos de Markov. Dicho concepto se refiere a la probabilidad de que la variable estudiada tome el valor P_1 en el momento t_1, condicional a tener un valor P_0 en t_o. Si escribimos dicha probabilidad como Prob. $(P_0, t_0; P_1, t_1)$, los procesos de Markov son tales que:

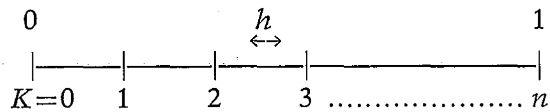
$$\text{Prob. } (P_0,\ t_0;\ P_1,\ t_1) \text{ es independiente de } P(t_s) \text{ para todo } t_s < t_0.$$

En otras palabras, una vez que el sistema está en P_0 en el tomento t_0, toda la historia pasada no tiene ningún efecto en el comportamiento futuro de P.

Los procesos continuos de Markov tienen las características anteriores con la peculiaridad de que P está definida en cada instante.

Dentro de los procesos continuos de Markov, el caso más típico son los «procesos estocásticos de difusión» o procesos de Ito en los que existirá algún cambio en P sin importarnos lo pequeño que resulte el intervalo de contratación considerado. En definitiva, estos procesos son el caso límite de procesos estocásticos discretos cuando el intervalo entre observaciones tiende a cero. Debe quedar claro que los procesos de difusión tienen recorridos muestrales continuos; dicho recorrido debe ser dibujado sin levantar la pluma del papel. Además, aun siendo continuos, dichos procesos son infinititamente variables y no son diferenciables en el sentido tradicional del cálculo matemático.

Interpretemos formalmente los comentarios anteriores (3). Consideremos un modelo discreto para una variable P que puede ser el precio de un activo financiero. Llamemos h al intervalo mínimo de tiempo sobre el que se puede contratar la variable P. Supongamos, asimismo, que el cambio de P sobre un período determinado es el resultado de acumular n pequeños cambios que ocurren regularmente en subintervalos de longitud $h=1/n$:



De esta forma, el cambio en el valor de P para el período completo será:

$$P(1)-P(0)=\sum_{k=1}^{n}[P(k)-P(k-1)] \qquad [3]$$

Analicemos el cambio sobre el k-ésimo sub-intervalo:

Sea E_k la esperanza matemática condicionada en toda la información disponible hasta el momento k. El cambio «no anticipado» vendrá dado por:

$$\varepsilon(k)\equiv P(k)-P(k-1)-E_{k-1}[P(k)-P(k-1)] \qquad [4]$$

Definamos $\mu_k\equiv E_{k-1}[P(k)-P(k-1)]/h$ como el cambio esperado en el valor de P por unidad de tiempo. Así, la expresión [4] se puede escribir como:

$$P(k)-P(k-1)=\mu_k h+\varepsilon(k) \qquad [5]$$

Definamos, asimismo, la varianza condicional del cambio en el valor de P por unidad de tiempo como:

$$\sigma_k^2\equiv E_{k-1}[\varepsilon^2(k)]/h \qquad [6]$$

---

(3) Un análisis detallado y analíticamente más riguroso que el presentado en este trabajo, se puede encontrar en MERTON (1982).

Por último, definamos una variable aleatoria $u(k)$ que será el cambio «no anticipado» normalizado:

$$u(k) \equiv \varepsilon(k)/\sqrt{\sigma_k^2 h} \qquad [7]$$

En definitiva, el cambio sobre el k-ésimo período viene dado por:

$$P(k)-P(k-1)=\mu_k h+\sigma_k u(k)\sqrt{h} \qquad [8]$$

La variable normalizada $u(k)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $E[u(k)]=0$
b) $\mathrm{var}[u(k)]=1$
c) $u(k)$ es serialmente independiente y está idénticamente distribuido.

Como se ha señalado anteriormente, el cambio de P sobre el período completo será la suma de los cambios en cada sub-intervalo:

$$P(1)-P(0)=\sum_{k=1}^{n}[P(k)-P(k-1)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\mu_k h+\sigma_k u(k)\sqrt{h}] \qquad [9]$$

Definamos, a continuación, una variable aleatoria z cuyos cambios de valor en el tiempo vienen explicitados por una ecuación como la expresión [8] con $\mu_k=0$ y $\sigma_k=1$. Así,

$$z(1)-z(0)=\sum_{k=1}^{n}[z(k)-z(k-1)]$$

$$=\sqrt{h}\sum_{k=1}^{n}u(k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{u(k)}{\sqrt{n}}, \text{ donde } h=1/n \qquad [10]$$

Por tanto, es claro que (4):

$$E[z(1)-z(0)]=\sum_{k=1}^{n} E[u(k)]/\sqrt{n}=0$$

[11]

$$\operatorname{var}[z(1)-z(0)]=\operatorname{var}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{u(k)}{\sqrt{n}}\right]=1$$

Además, por el Teorema Central del Límite,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(h\to 0)}}[z(1)-z(0)]=\lim_{\substack{n\to\infty\\(h\to 0)}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{u(k)}{\sqrt{n}}\right]$$

es normal, aunque u(k) no lo sea.

Cuando observamos los cambios de la variable z sobre intervalos de tiempo muy pequeños, decimos que dicha variable z es un proceso de

$$z(T)-z(0)=\sqrt{h}\sum_{k=1}^{n}u(k)$$

$$=\sqrt{T}\left[\sum_{k=1}^{n}\right]\frac{u(k)}{n}$$

ya que $h=T/n$.

Así,

$$E[z(T)-z(0)]=\sqrt{T}\sum_{k=1}^{n}E[u(k)]/\sqrt{n}=0$$

$$var[z(T)-z(0)]=T\ var\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{u(k)}{\sqrt{h}}\right]=T$$

(4) En el texto se ha normalizado el período completo de forma que analicemos el tiempo comprendido entre 0 y 1. Podemos generalizarlo a un período entre 0 y T. En este caso:

Wiener. Estos procesos significan, por tanto, que los cambios de z sobre intervalos infinitesimales de tiempo están distribuidos de forma normal con media cero y varianza igual a la longitud del intervalo, tal como queda explicitado en la expresión [11] y en el pie de página número cuatro. Asimismo, para que z sea un proceso de Wiener, los cambios de dicha variable tienen que ser serialmente independientes. En otras palabras, el cambio sobre un intervalo infinitesimal no produce ninguna información sobre el cambio en el siguiente intervalo infinitesimal.

Volvamos a estudiar el cambio en la variable P. Sabemos que el cambio de dicha variable sobre un período completo es la suma de los cambios en cada subintervalo. Consideremos el caso en el que el número de dichos subintervalos tiende a infinito, lo que equivale a que la longitud del intervalo h tienda a cero.

El componente estocástico del cambio en P tendrá la forma de infinitésimos *shocks* aleatorios independientes en el tiempo. Por tanto, el componente estocástico se convierte en unos *shocks* que ocurren en cada instante y que tienen las características de un proceso de Markov. Resulta fácil adivinar que dicho componente estocástico surge como consecuencia directa de las características que definen el proceso de Wiener.

Podemos concretar señalando que en el límite el cambio sobre el período completo, equivalente a una suma de cambios sobre subintervalos infinitesimales se puede escribir como una ecuación diferencial estocástica:

$$dP=\mu dt+\sigma dz \qquad [12]$$

donde dz es un proceso de Wiener que se escribe, en notación diferencial, como $dz=u\sqrt{dt}$.

En resumen, nótese que dP está compuesto de una parte determinista, μdt, y una parte estocástica, dz, que define las características del proceso.

La generalización de la expresión [12] representa los llamados procesos de Ito que escribimos como:

$$dP=\mu(P, t)\ dt+\sigma(P, t)\ dz \qquad [13]$$

donde el primer término de la ecuación [13] es el cambio esperado en P en el momento t, mientras que el segundo término es el componente incierto del cambio. En resumen, podemos decir que al imponer un proceso de Ito estamos suponiendo que P sigue un recorrido muestral continuo, sus movimientos son siempre inciertos sin importarnos lo pequeño que sea el intervalo entre observaciones, su varianza y, por tanto, su valor esperado son finitos y, por último, que es un proceso de Markov en P.

En el caso especial para el que:

$$\mu(P, t) = \mu P \quad \text{y}$$
$$\sigma(P, t) = \sigma P$$

tenemos un proceso geométrico browniano que puede escribirse como:

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz \qquad [14]$$

Si dP sigue dicho proceso, tenemos que dP/P sigue un proceso simple de Ito,

$$dP/P = \mu dt + \sigma dz \qquad [15]$$

En el caso en que dP sigue el proceso geométrico browniano y dz sea un proceso de Wiener se puede demostrar que $P(t)$ está distribuido de forma logarítmico-normal. Véase el Apéndice A.

Imaginemos, para finalizar esta sección, que tenemos una función $f(P, t)$ y queremos conocer como cambios en $f(P, t)$ son generados por cambios en P y t. Utilizando el teorema de Taylor, y teniendo en cuenta que los términos dP^2, $dPdt$ y dt^2 se vuelven muy pequeños en relación a dP y dt, sabemos que

$$df = \frac{\delta f(P, t)}{\delta P} dP + \frac{\delta f(P, t)}{\delta t} dt \qquad [16]$$

Sin embargo, tal como se demuestra en el Apéndice B, bajo la incertidumbre generada por los procesos de Ito, el término dP^2 es asintóticamente proporcional a dt, lo que analíticamente se puede expresar como:

$$dP^2 = 0(dt) \qquad [17]$$

En estas circunstancias, tenemos que:

$$df = \frac{\delta f(P, t)}{\delta P} dP + \frac{\delta f(P, t)}{\delta t} dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f(P, t)}{\delta P^2} dP^2 \qquad [18]$$

Como se demuestra en el mismo Apéndice B, para un proceso de Ito, $dP^2 = \sigma^2(P, t)dt$, por lo que podemos concluir que el llamado lema de Ito dice lo siguiente:

Sea P una variable que sigue un proceso de Ito, de la forma:

$$dP = \mu(P, t)dt + \sigma(P, t)dz$$

y supongamos que $f(P, t)$ es al menos una vez diferenciable en t y dos en P, entonces:

$$df = \frac{\delta f(P, t)}{\delta P} dP + \frac{\delta f(P, t)}{\delta t} dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f(P, t)}{\delta P^2} \sigma^2(P, t)dt \quad [19]$$

donde: $dt^2 = 0$, $dz\, dt = 0$ y $dz^2 = dt$.

Cabe destacar, por último, que una función f de una variable P que sigue un proceso de Ito sigue también un proceso de Ito. Esta aplicación del lema de Ito, que no demostramos, se utilizará en el razonamiento inicial de nuestra prueba de suficiencia que se presenta en la siguiente sección.

3. EL MODELO DE VALORACION DE ACTIVOS DE CAPITAL COMO CONDICION SUFICIENTE PARA LA VALORACION DE OPCIONES

Supongamos que el precio del activo i sigue un proceso geométrico browniano que, como se ha indicado en la sección anterior, es un caso especial de los procesos de Ito,

$$dP = \mu_i P dt + \sigma_i P dz \quad [20]$$

Imaginemos una opción de compra que es función del precio de la acción sobre la que se emite dicha opción y del tiempo. Esta función se representa como $C(P, t)$. Utilizando el lema de Ito se puede escribir que:

$$dC = \frac{\delta C}{\delta P} dP + \frac{\delta C}{\delta t} dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C}{\delta P^2} \sigma_i^2 P^2 dt \quad [21]$$

sustituyendo por el valor de dP,

$$dC=\frac{\delta C}{\delta P}(\mu_i P dt+\sigma_i P dz)+\frac{\delta C}{\delta t}dt+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\sigma_i^2 P^2 dt \qquad [22]$$

por lo que,

$$dC=\left(\frac{\delta C}{\delta P}\mu_i P+\frac{\delta C}{\delta t}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\sigma_i^2 P^2\right)dt+\left(\frac{\delta C}{\delta P}\sigma_i P\right)dz \qquad [23]$$

llamando,

$$\alpha_c=\frac{\delta C}{\delta P}\mu_i P+\frac{\delta C}{\delta t}+\frac{1}{2}\frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\sigma_i^2 \mathrm{P}^2 \qquad [24]$$

$$\delta_c=\frac{\delta C}{\delta P}\sigma_i P \qquad [25]$$

tenemos,

$$dC=\alpha_C\, dt+\delta_C\, dz \qquad [26]$$

lo que representa el proceso simple de Ito.

Podemos calcular, a continuación, la desviación estándar del rendimiento de una opción como:

$$\sigma(dC/C)\equiv\sigma_c=\frac{\delta C}{\delta P}\frac{P}{\mathrm{C}}\sigma_i \qquad [27]$$

Tal como señalan Cox y Rubinstein (1985) y Galai y Masulis (1976), el término $\frac{\delta C}{\delta P}\frac{P}{C}$ es la elasticidad de la opción. Por tanto, denominando η a dicha elasticidad,

$$\sigma_c=\eta\,\sigma_i \qquad [28]$$

el riesgo de una opción es igual al riesgo de la acción sobre la que se emite la opción por la elasticidad de la opción.

La ecuación [28] que expresa el riesgo total en términos de desviación estándar puede, asimismo, obtenerse en forma de riesgo no diversificable, por lo que:

$$\beta_c = \frac{\delta C}{\delta P} \frac{P}{C} \beta_i \qquad [29]$$

donde β_c representa el riesgo no diversificable de la opción.

Obtengamos, a continuación, el rendimiento esperado de una opción:

$$\mu_c \equiv \frac{E(dC)}{C} \equiv \frac{\alpha_c}{C} = \frac{\frac{\delta C}{\delta P} \mu_i P + \frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C}{\delta P^2} \sigma_i^2 P^2}{C} \qquad [30]$$

operando,

$$\frac{\delta C}{\delta P} \mu_i P + \frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 C}{\delta P^2} \sigma_i^2 P^2 - \mu_c C = 0 \qquad [31]$$

La ecuación diferencial obtenida por Black y Scholes y que sirve como paso previo a la fórmula de valoración de opciones se puede escribir como:

$$\frac{\delta C}{dt} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 P^2 \frac{\delta^2 C}{\delta P^2} = rf\left(C - P \frac{\delta C}{\delta P}\right) \qquad [32]$$

Una vez que tenemos la expresión [32] se puede demostrar la conocida fórmula de valoración de una opción de compra:

$$C = PN(X) - Erf^{-t} N(X - \sigma_i \sqrt{t}) \qquad [33]$$

donde,

$$X = \frac{\log(P/Erf^{-t})}{\sigma_i \sqrt{t}} + \frac{1}{2} \sigma_i \sqrt{t}$$

siendo, E el precio de ejercicio de opción, t el plazo de tiempo que le queda a la opción hasta el fin de su período de vigencia, y $N(X)$ es la probabilidad acumulada de una variable normal reducida (5).

Lo que tenemos que demostrar es que imponiendo el C.A.P.M. en la ecuación [31] obtenemos la expresión [32]. Para ello, vamos a utilizar el mismo razonamiento económico que Cox y Ross (1976). Si observa-

(5) En la expresión [33], rf representa uno más la tasa de rendimiento instantáneo de un activo sin riesgo.

mos la ecuación diferencial de Black y Scholes vemos que se puede caracterizar por dos interesantes aspectos:

a) El valor de la opción de compra no depende de la rentabilidad esperada de la acción.

b) El valor de la opción de compra no depende de las preferencias de los agentes económicos.

Bajo estas condiciones podemos añadir cualquier tipo de supuesto sobre dichas preferencias sin reducir la generalidad del argumento. Lo único que, de hecho, exige la ecuación diferencial de la ecuación [32] es que los agentes económicos actúen de forma consecuente con la eliminación de las oportunidades de arbitraje. En definitiva, podemos suponer una economía neutral ante el riesgo. Dicha economía implica que todos los activos financieros tienen una rentabilidad igual que la tasa de rendimiento sin riesgo. Por tanto, podemos suponer que:

$$\mu_i = \mu_c = rf \qquad [34]$$

Sustituyendo [34] en la ecuación [31] obtenemos:

$$\frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\ \sigma_i^2 P^2 + [rf + (\mu_m - rf)\beta_i]\ P\ \frac{\delta C}{\delta P} -$$

$$[rf + (\mu_m - rf)\beta_c]\ C + \frac{\delta C}{\delta t} = 0 \qquad [35]$$

Utilizando la ecuación [29],

$$\frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\ \sigma_i^2 P^2 + [rf + (\mu_m - rf)\ \beta_i]\ P\ \frac{\delta C}{P} -$$

$$\left[rf + (\mu_m - rf)\ \frac{\delta C}{\delta P}\ \frac{P}{C}\ \beta_i \right] C + \frac{\delta C}{\delta t} = 0 \qquad [36]$$

operando,

$$\frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 C}{\delta P^2}\ \sigma_i^2 P^2 + rf\ P\ \frac{\delta C}{\delta P} - rf\ C + \frac{\delta C}{\delta t} = 0 \qquad [37]$$

por lo que, finalmente,

$$\frac{\delta C}{\delta t}+\frac{1}{2}\ \sigma_i^2 P^2\ \frac{\delta^2 C}{\delta P^2}=rf\left(C-P\ \frac{\delta C}{\delta P}\right) \qquad [38]$$

que es idéntica a la expresión [32], con lo que obtenemos la ecuación diferencial de Black y Scholes, lo que concluye la prueba de suficiencia.

Apéndice A

El proceso geométrico browniano y la distribución logarítmico-normal

Supongamos que el precio de un activo financiero presenta el siguiente proceso dinámico:

$$dP=\mu\, P\, dt+\sigma\, P\, dz \qquad [A.1]$$

Imaginemos, asimismo, que tenemos una función de P como la siguiente:

$$X=f(P,\, t)=\log P \qquad [A.2]$$

Queremos obtener una ecuación diferencial estocástica para X en términos de dz. Para ello, utilizamos el lema de Ito:

$$dX=\frac{\delta f(P,\, t)}{\delta P}\, dP+\frac{\delta f(P,\, t)}{\delta t}\, dt+\frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 f(P,\, t)}{\delta P^2}\, \sigma^2 P^2 dt \qquad [A.3]$$

como:

$$\frac{\delta f(P,\, t)}{\delta P}=1/P,\quad \frac{\delta f(P,\, t)}{\delta t}=0,\quad \frac{\delta^2 f(P,\, t)}{\delta P^2}=-1/P^2$$

$$dX=\frac{1}{P}\ dP-\frac{1}{P^2}\ \sigma^2 P^2 dt \qquad [A.4]$$

Sustituyendo dP por su valor en [A.1]:

$$dX = \frac{1}{P} (\mu P\, dt + \sigma P\, dz) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \qquad [A.5]$$

$$dX = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma\, dz \qquad [A.6]$$

Por tanto, se puede concluir que z es una variable normal estándar por unidad de tiempo, X es una variable normal con media y varianza por unidad de tiempo igual a $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$ y σ^2, respectivamente. Consecuentemente, P está distribuido de forma logarítmico-normal con media y varianza igual a:

$$E(\log P) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t$$

$$\text{var}(\log P) = \sigma^2 t$$

APÉNDICE B

Definiciones y propiedades

Definamos los siguientes términos:

Se dice que una función f es asintóticamente proporcional a h o también que f es de orden h, si

$$f(h) \equiv 0(h) \Leftrightarrow \left| \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \right| \leq A < \infty \qquad [B.1]$$

alternativamente,

$$f(h) \equiv o(h) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \qquad [B.2]$$

Por ejemplo, sea $f(h) = ah^{1/2} + bh + ch^{3/2} + \ldots$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{\sqrt{h}} = a + b\sqrt{h} + ch + \ldots = a$$

por lo que, $f(h)=0(\sqrt{h})$ y $f(h)\neq o(\sqrt{h})$. En este caso, $f(h)$ es de orden $\sqrt{h}$.

Imaginemos, a continuación, un proceso del tipo,

$$dP=\mu dt+\sigma dz \qquad [B.3]$$

donde, dz es un proceso de Wiener, por lo que,

$$E(dz)=0, \quad \text{var}(dz)=dt \quad \text{y} \quad dz=0\ (\sqrt{dt})$$

Vamos a demostrar que, incluso sabiendo que dz es aleatorio y dt no lo es, $dz^2=dt$:

$$E(dz^2)=E(u^2dt)=dt\,E(u^2)=dt$$

$$\begin{aligned}\text{var}(dz^2) &= E\left[(dz^2)-E[dz^2])^2\right]\\ &= E\left[(u^2dt-dt)^2\right]\\ &= E\left[u^4dt^2-2u^2dt^2+dt^2\right]\\ &= dt^2\ E\left[u^4-2u^2+1\right]\end{aligned}$$

como :

$$E[u^4-2u^2+1]=0(1),$$

tenemos que:

$$\text{var}(dz^2)=0(dt^2)\ 0(1)=0(dt^2)=0$$

Si tal como hemos demostrado, $E(dz^2)=dt$ y $\text{var}(dz^2)=0$, entonces, $dz^2=dt$, como se quería demostrar.

Utilizando el resultado anterior y el proceso [B.3],

$$\begin{aligned}dP^2 &= \mu^2\,dt^2+2\,\mu\sigma\,dz\,dt+\sigma^2\,dz\\ &= \sigma^2\,dz^2+o(h)=\sigma^2\,dt\end{aligned}$$

por lo que $dP^2=0(dt)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BLACK, F., and M. SCHOLES (1973): «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy* 81, 637-659.

COX, J., and S. ROSS (1976): «The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes», *Journal of Financial Economics* 3, 145-166.

COX, J., and M. RUBINSTEIN (1985): *Options Markets,* Prentice Hall, Inc., New Jersey.

GALAI, D., and R. MASULIS (1976): «The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock», *Journal of Financial Economics* 3, 53-81.

GARMAN, M. (1977): *A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes,* Working Paper, Graduate School of Business, University of California, Berkeley.

MERTON, R. (1972): «An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier», *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, 1851-1872.

MERTON, R. (1982): *On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models.* Financial Economics: Essays in Honor of Paul Cootner, W. Sharpe and C. Cootner (eds.). Prentice Hall, Inc., New Jersey.

RUBINSTEIN, M. (1976): «The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options», *Bell Journal of Economics* 7, 407-425.