REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. XVI, n. 50
1986
pp. 379-393

Gonzalo Rubio Irigoyen *
Profesor del Departamento de Economía de la Empresa Universidad del País Vasco e Instituto de Economía Pública

LA CRITICA DE ROLL Y LA SOLUCION DE SHANKEN: UNA APLICACION AL CASO ESPAÑOL

1. *Introducción.*—2. *Equilibrio en los mercados financieros.* 3. *La contrastación empírica de los modelos de equilibrio: comentarios generales.* 4. *La solución de Shanken: una aplicación al caso español.*

1. Introducción

Durante muchos años ha resultado imposible contrastar empíricamente modelos de equilibrio de valoración de activos financieros. Tal como señalaba Roll (1977), la única conclusión a la que se podía llegar cuando se intentaba efectuar contrastes de esas características era que los índices de mercado utilizados fuesen eficientes. Dada la imposibilidad de observar la variable agregada teórica que viene impuesta en los modelos de equilibrio, otro tipo de conclusiones resultaban imposibles. Shanken (1985 b) propone una metodología que supera, en gran medida, las dificultades que los económetras encontraban anteriormente. La único que tenemos que imponer es el coeficiente de correlación entre la verdadera variable teórica y el índice utilizado en la práctica. Como reconoce Roll (1977), es lógico suponer que dichos índices de mercado están altamente correlacionados con la variable teórica. Una aplicación de la metodología de Shanken al caso español exige solamente un coeficiente de correlación de 0,50 para rechazar el modelo de *equilibrio* de

* Quisiera agradecer al Profesor Jay Shanken su valiosa asistencia en la preparación de este trabajo. Cualquier error es exclusivamente de mi responsabilidad.

Sharpe y Lintner. Este resultado implica que, en España, podemos rechazar dicho modelo con un alto grado de confianza, al menos durante los veinte años comprendidos entre 1963 y 1982.

2. Equilibrio en los mercados financieros

La teoría financiera moderna establece la existencia de una relación lineal entre la rentabilidad esperada de un activo con riesgo y la covarianza de su rentabilidad con una variable agregada que representa la utilidad marginal de la riqueza o del consumo.

En un contexto sencillo donde el inversor representativo maximiza su utilidad esperada en un único período, es fácil demostrar la relación lineal anterior (1). Supongamos que la utilidad del individuo representativo es una función de la riqueza futura. Esta función es continuamente diferenciable, aumenta monotónicamente y es estrictamente cóncava. Llamando,

R_f = 1 + rentabilidad de un activo sin riesgo
R_j = 1 + rentabilidad del activo con riesgo j
$E(R_j)$ = 1 + rentabilidad esperada del activo con riesgo j
W = riqueza actual del individuo representativo
W^F = riqueza futura del individuo representativo
$U(W^F)$ = función de utilidad
X_j = fracción que el individuo representativo tiene del activo j
N = número de activos

El problema del individuo será:

$$\underset{\{X_j\}}{\text{máx.}}\; E[U(W \sum_{j=1}^{N} X_j R_j)]$$

sujeto a

$$\sum_{N}^{j=1} X_j = 1$$

(1) El inversor representativo surge de las condiciones expuestas por Rubinstein (1974) bajo el Teorema de la Agregación. Nuestra demostración es una prueba sencilla de los análisis efectuados por Rubistein (1973 a, 1973 b) donde el aparato matemático es más complejo.

donde

$$W^F = W \sum_{j=1}^{N} X_j \; R_j \qquad [1]$$

Formamos el Lagrangiano

$$\underset{\{X_j\}}{\text{máx.}} \; E[U(W \sum_{j=1}^{N} X_j \; R_j)] - \lambda[\sum_{j=1}^{N} X_j - 1] \qquad [2]$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Las condiciones de primer orden establecen,

$$\begin{aligned} &W \; E[R_j \; U'(W^F)] = \lambda, \; V_j \\ &W \; R_f \; E \; [U'(W^F)] = \lambda \end{aligned} \qquad [3]$$

donde $U'(W^F)$ es la utilidad marginal de la riqueza futura. Igualando ambas ecuaciones

$$R_f \; E \; [U'(W^F)] = E \; [R_j \; U'(W^F)] \qquad [4]$$

como,

$$E \; [R_j \; U'(W^F)] = E(R_j) \; E \; [U'(W^F)] + \text{cov.} \; [R_j, U'(W^F)] \qquad [5]$$

obtenemos,

$$E(R_j) = R_f + \left[-\frac{1}{E \; [U'(W^F)]} \right] \text{cov.} \; [R_j, U'(W^F)] \qquad [6]$$

y, por tanto,

$$E(R_j) = R_f + \text{cov.} \; (R_j, M)$$

donde

$$M = -\frac{U'(W^F)}{E \; [U'(W^F)]} \qquad [7]$$

Es conocida la transformación que se puede hacer de ecuaciones similares a la [7] de forma que obtengamos,

$$P_0 = \frac{E(CF_1) + \dfrac{1}{E \; [U'(W^F)]} \; \text{cov.} \; [CF_1, \; U'(W^F)]}{R_f} \qquad [8]$$

o bien,

$$P_0 = \frac{E(CF_1) - \text{cov. } (CF_1, M)}{R_f} \qquad [9]$$

donde CF_1 es el *cash flow* del activo j al final del período analizado y P_0 es el precio actual del mismo activo.

De forma similar, pero en un contexto donde la incertidumbre se representa por los estados de naturaleza futuros en un marco multiperíodo, Rubinstein (1976) establece las bases de lo que se conoce con el nombre de «Consumption Capital Asset Pricing Model» de Breeden (1979).

Supongamos que t representa las fechas futuras y $S(t)$ una variable aleatoria que indica el estado de la naturaleza en una fecha concreta. Por tanto, $CF[S(t)]$ es el *cash flow* recibido por un activo en el estado de naturaleza $S(t)$. Se puede demostrar que bajo la imposibilidad de arbitraje existe un conjunto de variables aleatorias $Z[S(t)]$ que son las mismas para todos los activos, tal que:

$$P_0 = \sum_{t} \sum_{S(t)} Z[S(t)] \; CF[S(t)] \qquad [10]$$

La variable $Z[S(t)]$ es el precio hoy de una peseta entregada en el futuro si, y solamente, si el estado de naturaleza S ocurre en la realidad. Intuitivamente la ecuación [10] es el valor actual de todos los *cash flows* futuros representados en un mundo de incertidumbre.

Partiendo de la ecuación [10], Rubinstein (1976) demuestra una relación puramente matemática, sin contenido económico, que, sin embargo, establece las bases para un modelo de valoración de activos en un contexto de múltiples períodos. La expresión matemática viene dada por:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(CF_t) + \dfrac{1}{E(Y_t)} \text{ cov. } (CF_t, Y_t)}{R_{ft}} \qquad [11]$$

donde

$$R_{ft} = \frac{1}{\sum_{S(t)} Z[S(t)]}$$

A esta relación puramente matemática se le debe otorgar un contenido económico mediante una clara interpretación del significado de la variable Y_t. Suponiendo que las funciones de utilidad sean tales que la utilidad de un período es independiente de la utilidad del resto de los períodos, y maximizando

$$\underset{\{C[S(t)]\}}{\text{máx.}} \sum_{t} \sum_{S(t)} \pi[S(t)]\ U_t\ \{C[S(t)]\} \qquad [12]$$

sujeto a la dotación inicial, donde $\pi[S(t)]$ es la probabilidad establecida en el momento cero sobre la ocurrencia del estado de naturaleza S, se demuestra que la variable Y_t es la utilidad marginal del consumo en el momento t:

$$Y_t = U'_t(C_t) \qquad [13]$$

Por lo que un modelo general de valoración de activos con riesgo en un contexto de equilibrio y en un marco de múltiples períodos viene dado por la expresión:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(CF_t) + \dfrac{1}{E\,[U'_t(C_t)]}\ \text{cov.}\ [CF_t,\ U'_t(C_t)]}{R_{ft}} \qquad [14]$$

Esta ecuación es muy similar a la valoración mediante la fórmula [8]. La mayor aportación de este modelo es que la valoración de activos, cuando existe una generación de *cash flows* en muchos períodos, depende de la covarianza de dichos *cash flows* con una variable agregada en *consumo.* La diferencia con la expresión [8] está en que en aquélla la covarianza de los *cash flows* se realiza respecto a la utilidad marginal de la *riqueza* futura (2). Basándose en este trabajo, Breeden desarrolla un modelo de valoración en el que explícitamente se indica que los individuos derivan su utilidad del consumo. Los precios de dichos activos dependen de las covarianzas entre sus rentabilidades y el consumo agregado. Este modelo es similar al conocido «Capital Asset Pricing Model» (C.A.P.M.) en el sentido de valorar activos mediante una única beta, incluso cuando se flexibiliza el modelo para permitir múltiples períodos.

(2) Naturalmente, al ser un modelo válido para un único período la riqueza final será consumida en su totalidad. El problema, tal como se expone más adelante, es que no podemos extender el caso sencillo del período único a una situación más compleja manteniendo como único factor la covarianza de la rentabilidad con la utilidad marginal de la riqueza, lo cual sí es posible, sin embargo, en la ecuación [14].

Si en lugar de utilizar consumo, se utiliza riqueza agregada y se permiten múltiples períodos, Merton (1973) demuestra que los individuos deben formar una cartera de cobertura que les proteja ante futuros cambios en el conjunto de oportunidades de inversión. El modelo resultante es una expresión multi-beta, fundamentalmente diferente a la valoración en un único período. Por tanto, las aportaciones de Rubinstein y Breeden se concretan en demostrar que utilizando consumo agregado, el modelo de Merton puede condensarse en un modelo uni-beta. Debemos señalar que esta interpretación es posible solamente cuando las utilidades de los individuos son independientes en el tiempo. Bergman (1985) demuestra que utilizando funciones de utilidad intertemporales más realistas, no es posible condensar relaciones multi-betas en una relación donde no sea necesario formar carteras de cobertura adicionales.

3. La contrastación empírica de los modelos de equilibrio: comentarios generales

Hemos establecido que la rentabilidad esperada de los activos financieros con riesgo depende de la covarianza entre dicha rentabilidad y la utilidad marginal de la riqueza o del consumo. En cualquier caso, lo importante desde un punto de vista empírico es que dicha variable agregada no es observable. Esta fue la crítica principal del famoso e influyente artículo de Roll (1977). Debe quedar claro que en la sección 2 hemos hablado de modelos muy generales. *Un caso particular* de dichos modelos es el conocido C.A.P.M. de Sharpe-Lintner. La riqueza agregada, representada por la rentabilidad de la verdadera cartera de mercado, sustituye a una variable más fundamental como es la utilidad marginal. La crítica de Roll se centró en que la auténtica cartera de mercado no se puede observar empíricamente. La esencia de su análisis permite, lógicamente, ampliarse a otros modelos mucho más generales como los estudiados en la sección anterior de este trabajo. Una vez establecido este punto volvamos al modelo más conocido, el C.A.P.M. En este contexto, equilibrio en los mercados financieros requiere que la verdadera cartera ponderada de mercado sea una cartera eficiente (3). Esto significa que la relación puramente matemática, válida para cualquier cartera eficiente, necesariamente sea también válida para la cartera de mercado. Por tanto, existe una relación lineal entre la rentabilidad esperada de un

(3) Véase Fama (1976), Roll (1977) y Ross (1977 b).

activo con riesgo y su covarianza con la rentabilidad de la verdadera cartera de mercado. Roll (1977) señala, por tanto, que los análisis desarrollados mediante la utilización de un índice de mercado que no sea la verdadera cartera de mercado, no es un contraste empírico del C.A.P.M. Estos contrastes valoran solamente la eficiencia del índice de mercado observado.

Recientemente, Ross (1976, 1977 a) sugiere un modelo conocido con el nombre de «Arbitrage Pricing Theory» (A.P.T.) donde establece mediante simples argumentos de arbitraje la importancia de la covarianza como medida adecuada del riesgo en los mercados financieros.

El modelo original de Ross parte de una secuencia infinita de rentabilidades de activos financieros que se ajustan a un modelo estadístico factorial de la forma siguiente:

$$R_i = E_i + b_i\,\delta + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \ldots, \infty \qquad [15]$$

donde E_i es la rentabilidad esperada del activo i, δ es un vector K-dimensional aleatorio de factores y b_i es otro vector K-dimensional que cuantifica la sensibilidad de la rentabilidad del activo i a los movimientos de los factores anteriores. Por último, el término ε_i refleja la influencia aleatoria de la información específica del activo i e independiente del resto de los activos. Bajo una serie de supuestos técnicos, Ross establece la existencia de una γ_0 y un vector K-dimensional de γ_1 tal que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} [E_i - \gamma_0 - b_i\,\gamma_1]^2 < \infty \qquad [16]$$

Por tanto, se señala que la suma infinita de desviaciones al cuadrado de la relación lineal de rentabilidades esperadas es finita.

Debido al tratamiento empírico que se le ha dado a la relación anterior, han surgido interesantes discusiones sobre el significado concreto del A.P.T. Como señala Shanken (1982, 1985 a), dicha relación implica que la mayoría de las desviaciones deben ser prácticamente cero o deben estar cerca a cero, pero que tal relación no conlleva restricciones en ninguna desviación en particular. La literatura empírica ha ignorado tales desviaciones y ha supuesto un modelo exacto de la forma (4):

$$E_i = \gamma_0 + b_i\,\gamma_1 \qquad [17]$$

---

(4) Véase, a modo de ejemplo, ROLL y ROSS (1980).

Aunque Ross (1976, 1977 a) prueba y dice que el A.P.T. viene dado por la ecuación [16], la literatura empírica ha deformado el contexto suponiendo, implícitamente, que la teoría señala que la ecuación [15] lleva directamente a la ecuación [17]. Entendido de esta forma, el A.P.T. señala que las rentabilidades esperadas dependen de varios (finitos) factores independientes. En ningún momento, el modelo indica explícitamente cuáles son dichos factores. En el C.A.P.M. hay un factor perfectamente definido. En la teoría supuestamente alternativa, la rentabilidad del mercado podría ser un factor, aunque no lo sabemos con seguridad. Todo esto quiere decir que la interpretación económica del A.P.T. tal como se define por Ross es tremendamente ambigua (5). Necesitamos, si queremos obtener una relación de equilibrio, descomponer la variable agregada de mercado. La exacta descomposición teórica de dicha variable es mucho más que la relación surgida mediante unas pruebas simples de arbitraje. En este sentido, tal como apunta Shanken (1985 a), cabe señalar el trabajo de Sharpe (1977), donde el original C.A.P.M. se transforma en un multi-beta C.A.P.M. Este modelo sería un claro antecedente del nuevo modelo de *equilibrio* desarrollado en un contexto de arbitraje por Connor (1984). Debe quedar claro que el «Equilibrium Arbitrage Pricing Theory» es fundamentalmente diferente del modelo original de Ross. Además, este nuevo modelo tiene los mismos problemas empíricos que el C.A.P.M.

Establezcamos un contenido formal a los comentarios anteriores (6). En términos matriciales, la ecuación o modelo factorial [15] se representa como

$$R=E+b\,\delta+\varepsilon \qquad [18]$$

donde R es el vector N-dimensional de la expresión [15] y E es el vector de rentabilidades esperadas; b es ahora una matriz $N\times K$ y como antes $E(\varepsilon)=0$, cov. $(\varepsilon, \delta)=0$ y var. $(\varepsilon)=\Sigma$ que se supone definida positiva.

Sin suponer la existencia de un activo sin riesgo, nuestra relación general de equilibrio se puede escribir como

$$E=\gamma_{0M}\,1_N+\text{cov.}\ (R,\ M) \qquad [19]$$

(5) SHANKEN (1982) demuestra que tratar la aproximación [16] como una relación exacta implica que todos los activos tengan la misma rentabilidad esperada.

(6) El desarrollo que se presenta a continuación está basado en SHANKEN (1985 b), DYBVIG (1983) y GRINBLATT y TITMAN (1983).

Sustituyendo el valor de R de acuerdo con el modelo factorial

$$E=\gamma_{0M}\,1_N+\text{cov.}\ (E+b\,\delta+\varepsilon,\ M) \qquad [20]$$

por lo que

$$E=\gamma_{0M}\,1_N+b\,\gamma_{1M}+d \qquad [21]$$

donde

$$\gamma_{1M}\equiv\text{cov.}\ (\delta,\ M) \quad \text{y} \quad d\equiv\text{cov.}\ (\varepsilon,\ M)$$

Solamente cuando la variable agregada de equilibrio M es una función exacta de todos los factores, el vector de desviaciones d es cero. Esta es la condición que constituye la esencia del modelo de Connor (1984) señalado anteriormente. En este caso especial, efectivamente, la expresión [17] se puede considerar válida. Por tanto, cuando se efectúa un test de equilibrio basado en un modelo factorial exacto, estamos realizando, a su vez, un test sobre la hipótesis de que el vector de las disturbaciones aleatorias del modelo factorial es independiente de la variable agregada M. Naturalmente, si fuéramos capaces de observar la variable agregada, se podría llevar a cabo un test de dicha restricción en lugar de imponerla como hipótesis conjunta. Dado que no es posible, el análisis empírico del A.P.T. queda sometido a las mismas críticas efectuadas por Roll (1977).

En el contexto tradicional del C.A.P.M., el conocido modelo de mercado (7) juega el mismo papel que el modelo factorial de la ecuación [18]. Está claro que, por construcción, las disturbaciones aleatorias del modelo de mercado son ortogonales a la rentabilidad del índice de mercado observado. Sin embargo, dichas perturbaciones no tienen que ser independientes de la variable agregada M, que en el caso particular del C.A.P.M. lo constituye la rentabilidad de la verdadera cartera de mercado. Por tanto, establecer conclusiones positivas al realizar un contraste empírico tradicional del C.A.P.M. supone la siguiente hipótesis conjunta implítica: la cartera de mercado utilizada es un instrumento perfecto de la verdadera cartera de mercado, o alternativamente, que los componentes residuales del modelo de mercado obtenidos mediante la cartera de mercado observada son independientes de la verdadera cartera de mercado.

(7) Véase FAMA (1976).

4. La solución de Shanken: una aplicación al caso español

Tal como se expone con detalle por Rubio (1985), el cero-beta C.A.P.M. se puede expresar como:

$$E=X\Gamma \qquad [22]$$

donde $X\equiv(1_N : \beta)$, $\Gamma\equiv(\gamma_0, \gamma_1)'$ y $E\equiv E(R_t)$. En el cuadro 1 se replican los resultados de un contraste empírico de la expresión [22] realizados por Rubio (1985) utilizando un banco de datos que comprende 160 empresas durante el período enero de 1963 a diciembre de 1982. Como se indica en el trabajo mencionado en el párrafo anterior, la primera línea representa simplemente aproximaciones. No lo podemos considerar válido cuando se utilizan muestras de tamaño razonable. La segunda línea de los estadísticos F presenta los valores máximo posibles de los verdaderos valores p (8). En este caso, el estadístico F está basado en una distribución Hotelling $T^2(N, T-2)$. El valor p agregado es 0,021. Esto significa que podemos rechazar la eficiencia del índice de mercado ponderado m durante el período 1963-1982 sin recurrir a inferencias asintóticas.

Pensemos en el índice m como una variable o instrumento que está altamente correlacionado con la variable teórica agregada M. Shanken (1985 b) deriva una restricción en la distribución conjunta del instrumento y las rentabilidades de los activos. Dicho autor obtiene una cota en una expresión cuadrática de las desviaciones entre rentabilidades esperadas y la covarianza de rentabilidades con la variable teórica no observable:

$$d'\,\Sigma^{-1}\,d<\sigma^2(M)\,(1-\rho^2) \qquad [23]$$

(8) El valor p representa la probabilidad de exceder un nivel dado en el estadístico correspondiente. El estadístico en que se basa el test y, por tanto, la distribución F viene dado por la expresión:

$$Q=T\,e'\,\hat{\Sigma}^{-1}\,e/(1+\hat{\gamma}^2_1(MLE)/S^2_m)$$

donde $e=\bar{R}-\hat{X}\hat{\Gamma}$, siendo $\bar{R}$ la media de las series temporales de los vectores de rentabilidad R_t, $\hat{X}=(1_N:\hat{\beta})$, $\hat{\Gamma}$ el estimador de máxima verosimilitud de Γ obtenido mediante una transformación de los estimadores mínimo cuadráticos generalizados, S^2_m es la varianza del instrumento durante cada sub-período y T el número de meses en cada sub-período. La distribución F tiene N y T-N-1 grados de libertad, ya que surge de una distribución $T^2(N,T\text{-}2)$.

donde d es la desviación que implica la ecuación [21], $\sigma^2(M)$ es la varianza de la variable no observable y ρ es el coeficiente de correlación entre M y el instrumento empleado en la práctica, en este caso m (9).

Esta cota permite una hipótesis conjunta más flexible que las utilizadas en contrastes tradicionales del C.A.P.M. Mediante una serie de observaciones a la expresión [23], podemos inferir la ineficiencia de la verdadera cartera de mercado imponiendo una cota por abajo al coeficiente de correlación entre m y M. El segundo término no observable en [23], la varianza de M, puede ser sustituido por un *ratio* a la Sharpe que expresa el premio del instrumento al riesgo por unidad de riesgo.

Una de las principales ideas en el trabajo de Shanken es que la expresión [23] no se cumple cuando el coeficiente de correlación entre el instrumento y la cartera única tangente asociada con un hipotético tipo de interés sin riesgo, las rentabilidades de los activos en la muestra y el instrumento, es menor que el coeficiente de correlación entre el instrumento y la variable agregada teórica. Esta idea conlleva una implantación práctica de los contrastes de modelos de *equilibrio.*

Suponiendo, a diferencia de lo expuesto en la sección 3, la existencia de una tasa sin riesgo, Gibbons, Ross y Shanken (1985) demuestran que

$$H = T d^{*\prime} \hat{\Sigma}^{-1} d^{*} / (1 + \hat{\theta}^2_m) \qquad [24]$$

condicionado en el instrumento m, tiene una distribución T^2 no central con grados de libertad N y $T-2$ y un parámetro de no centralidad dado por:

$$\lambda = T d' \Sigma^{-1} d / (1 + \hat{\theta}^2_m) \qquad [25]$$

donde d^* es el vector de desviaciones de la expresión $E = X\Gamma$ cuando suponemos la existencia de una tasa sin riesgo, y $\hat{\theta}^2_m$ es el estimador de máxima verosimilitud del *ratio* de Sharpe (10).

Se puede demostrar que el parámetro de no centralidad queda restringido de la forma siguiente:

$$\lambda \leqslant T\, \theta^2_m (\bar{\rho}^{-2} - 1) / (1 + \hat{\theta}^2_m) \qquad [26]$$

donde $\bar{\rho}$ es la cota por abajo impuesta en ρ y θ^2_m es el verdadero (poblacional) *ratio* de Sharpe. El hecho de que θ^2_m no se pueda obtener sin error

(9) En el Apéndice 1 se presenta una prueba simplificada del trabajo de SHANKEN (1985 b).

(10) Los tipos de interés sin riesgo fueron preparados por J. A. Palacios y J. L. Suárez, del Banco de Vizcaya y del Instituto de Estudios Superiores de la Empresa.

de estimación presenta dificultades adicionales en el nuevo contraste empírico. Shanken (1985 *b*) propone una metodología Bayesiana que, a su vez, es utilizada en este trabajo.

Estimadores insesgados de θ_m fueron calculados para cada uno de los sub-períodos siguientes: 1963-67, 1968-72, 1973-77 y 1978-82. Dada su media, se obtuvieron tres valores de θ_m de acuerdo a una masa probabilística asignada anteriormente. En nuestro caso, suponemos una distribución simétrica con probabilidades 0,25, 0,50 y 0,25 para cada uno de los tres valores anteriores. La media anualizada de θ_m fue 0,434, que corresponde a un premio del 8,7 por 100 en una desviación estándar del 20 por 100. Estos tres valores fueron finalmente considerados a la hora de calcular los valores p no centrales. Por tanto, para cada uno de los tres valores de θ_m se obtiene la cota a λ de acuerdo con la expresión [26]. El mismo estimador de máxima verosimilitud; esto es, $\hat{\theta}^2_m$ se utiliza en los tres cálculos. Se obtienen tres valores p relativos a tres distribuciones F no centrales. Estos tres valores se ponderan de acuerdo con la densidad especificada de antemano, de forma que obtenemos un valor p final que aparece para cada sub-período y para cada $\bar{\rho}$ en el cuadro 2.

Mediante este procedimiento, somos capaces de contrastar si el coeficiente de correlación entre el índice del mercado utilizado m y la cartera tangente a la frontera eficiente excede las cotas impuestas, desde $\rho=0,90$ hasta $\rho=0,50$, que aparecen en el cuadro 2.

La segunda parte del cuadro 2 presenta, a modo de comparación, un contraste de eficiencia de m cuando se impone una tasa sin riesgo. Este último resultado es equivalente al del cuadro 1, excepto que la cartera cero-beta se sustituye por el tipo de interés sin riesgo.

Tal como esperábamos, cuando no exigimos un coeficiente de correlación tan alto, se vuelve más difícil rechazar la hipótesis nula. Concretamente, el tipo de conclusión a la que llegamos es que el modelo de *equilibrio* de Sharpe-Lintner y la hipótesis conjunta que el instrumento empleado explica más del 25 por 100 de la variabilidad de la verdadera cartera de mercado puede ser rechazado en un período de veinte años entre 1963 y 1982. El rechazo se debe principalmente al primer subperíodo. Cabe recordar que en el año 1968 nuevas instituciones de marcado carácter competitivo surgieron en el mercado español. Los Fondos de Inversión dieron un impulso decisivo al desarrollo de las Bolsas españolas. Nuestro resultado parece confirmar, una vez más, la necesidad de inversión institucional en España.

APENDICE 1

Proyectando M en δ y en una constante,

$$M = a_M + b_M\,\delta + \varepsilon_M$$

Como ε es ortogonal a δ, $d = \text{cov.}\ (\varepsilon, M) = \text{cov.}\ (\varepsilon, \varepsilon_M)$, ya que $\text{cov.}\ (\varepsilon, M) =$

$$= \text{cov.}\ (\varepsilon, a_M + b_M\,\delta + \varepsilon_M) =$$
$$= \text{cov.}\ (\varepsilon, a_M) + b_M\ \text{cov.}\ (\varepsilon, \delta) + \text{cov.}\ (\varepsilon, \varepsilon_M)$$

y los dos primeros términos son cero.

Si proyectamos ε_M en ε (sin constante),

$$\varepsilon_M = Z'\,\varepsilon + \eta$$

donde

$$\text{cov.}\ (\varepsilon, \eta) = 0.$$

Por definición,

$$Z = \Sigma^{-1}\ \text{cov.}\ (\varepsilon, \varepsilon_M) = \Sigma^{-1}\, d.$$

Sabemos que

$$\varepsilon_M = M - a_M - b_M\,\delta,$$

por lo que

$$\text{var.}\ (\varepsilon_M) = \text{var.}\ (M) - b^2_M\ \text{var.}\ (\delta)$$
$$= \text{var.}\ (M) - \text{var.}\ (M)\,\frac{b^2_M\ \text{var.}\ (\delta)}{\text{var.}\ (M)}$$

como

$$\frac{b^2_M\ \text{var.}\ (\delta)}{\text{var.}\ (M)} = \rho^2$$

$$\text{var.}\ (\varepsilon_M) = \text{var.}\ (M)\ (1 - \rho^2)$$
$$\text{var.}\ (\varepsilon_M) = \text{var.}\ (Z'\varepsilon) + \text{var.}\ (\eta) \geqslant \text{var.}\ (Z'\varepsilon)$$
$$\text{var.}\ (Z'\varepsilon) = Z'\,\Sigma\,Z = d'\,\Sigma^{-1}\,d,$$

por lo que

$$d'\,\Sigma^{-1}\,d \leqslant \text{var.}\ (M)\ (1 - \rho^2) \qquad \text{c.q.d.}$$

CUADRO 1

TEST DE EFICIENCIA DEL INDICE DE MERCADO PONDERADO (*m*)

Regresión cros-seccional de las rentabilidades esperadas en betas y unos

(1963-82)

Subperíodos	*1963-67*	*1968-72*	*1973-77*	*1977-82*	*Valor* p *agregado*
F (9,50)	3,716	0,830	1,368	1,983	0,005
(Valor *p*)	(0,001)	(0,592)	(0,228)	(0,061)	
F (10,49)	3,278	0,732	1,207	1,749	0,021
(Valor *p*)	(0,003)	(0,691)	(0,310)	(0,096)	

NOTAS:

— Inferencias utilizando la primera línea de los estadísticos *F* son válidas sólo asintóticamente.

— La segunda línea de los estadísticos *F* presenta los valores máximos posibles que pueden alcanzar los verdaderos valores *p*.

CUADRO 2

SHARPE-LINTNER CAPM

Contraste de la hipótesis conjunta del modelo de equilibrio de Sharpe-Lintner y que el índice de mercado ponderado explica más que un determinado porcentaje de variabilidad de la verdadera cartera de mercado ($\bar{\rho}$)

Subperíodo	*1963-67*	*1968-72*	*1973-77*	*1978-82*	Valor *p* *agregado*
F (10,49)	3,296	0,799	1,909	1,848	—
$\bar{\rho}=0{,}90$	0,003	0,644	0,073	0,084	0,005
$\bar{\rho}=0{,}80$	0,004	0,662	0,083	0,096	0,007
$\bar{\rho}=0{,}70$	0,005	0,687	0,099	0,114	0,011
$\bar{\rho}=0{,}60$	0,008	0,721	0,125	0,143	0,021
$\bar{\rho}=0{,}50$	0,014	0,770	0,174	0,197	0,052

Test de eficiencia de m cuando se supone la existencia de una tasa sin riesgo

Subperíodo	*1963-67*	*1968-72*	*1973-77*	*1978-82*	*Valor* p *agregado*
F (10,49)	3,296	0,799	1,909	1,848	0,003
(valor *p*)	(0,002)	(0,630)	(0,066)	(0,077)	

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BERGMAN, Y., 1985: *Time Preference and Capital Asset Pricing Models,* Journal of Financial Economics 12, 145-159.

BREEDEN, D., 1979: *An Intertemporal Asset Pricing Moder with Stochastic Consumption and Investment Opportunities,* Journal of Financial Economics 7, 265-296.

CONNOR, G., 1984.: *A Unified Beta Pricing Theory,* Journal of Economic Theory 34, 13-31.

DYBVIG, P., 1983: *An Explicit Bound on Deviations from APT Pricing in a Finite Economy,* Journal of Financial Economics 12, 483-496.

FAMA, E., 1976: *Foundations of Finance,* Basic Books, New York.

GIBBONS, M., ROSS, A., and J. SHANKEN, 1985: *A Test of the Efficiency of a Given Portfolio,* Working Paper (Graduate School of Business, Stanford University).

GRINBLATT, M., and S. TITMAN, 1983: *Factor Pricing in a Finite Economy,* Journal of Financial Economics 12, 497-507.

MERTON, R., 1973: *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model,* Econometria 41, 867-887.

ROLL, R., 1977: *A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory,* Journal of Financial Economics 4, 129-176.

ROLL, R., and S. ROSS, 1980: *An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory,* Journal of Finance 35, 1073-1104.

ROSS, S., 1976: *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing,* Journal of Economic Theory 13, 341-360.

ROSS, S., 1977 a: *Return, Risk and Arbitrage.* In I. Friend and J. Bicksler (eds.), Risk and Return in Finance, Cambridge, Massachusetts, Ballinger.

ROSS, S., 1977 b: *The Capital Asset Pricing Model, Short-Sale Restrictions and Related Issues,* Journal of Finance 1, 177-184.

RUBINSTEIN, M., 1973 a: *A Comparative Statics Analysis of Risk Premiums,* The Journal of Business 46, 605-615.

RUBINSTEIN, M., 1973 b: *The Fundamental Theorem of Parameter-Preference Security Valuation,* Journal of Financial and Quantitative Analysis 8, 61-69.

RUBINSTEIN, M., 1974: *An Aggregation Theorem for Securities Markets,* Journal of Financial Economics 1, 225-244.

RUBINSTEIN, M., 1976: *The Valuation of Uncertain Income Streamn and the Pricing of Options,* Bell Journal of Economics 7, 407-425.

RUBIO, G., 1985: *Asset Pricing and Equity Rights Issues: The Case of the Spanish Capital Market,* Tesis Doctoral no Publicada, University of California, Berkeley.

SHANKEN, J., 1982: *The Arbitrage Pricing Theory: Is it Testable?,* Journal of Finance 37, 1129-1140.

SHANKEN, J., 1985 a: *Multibeta CAPM or Equilibrium APT? - A Reply to Dybvig and Ross,* Journal of Finance 40, 1189-1196.

SHANKEN, J., 1985 b: *Proxies and Asset Pricing Relations. Living with the Roll Critique,* Working Paper (Graduate School of Business, University of California, Berkeley).

SHARPE, W., 1977: *The Capital Asset Pricing Model: A Multibeta Interpretation, In:* Levy and Sarnat (eds.), Financial Decision Making Under Uncertainty, Academic Press, New York.