REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. X, n. 35
mayo-agosto 1981
pp. 283-298

TEORIA LINEAL DE LA CONTABILIDAD
Análisis matricial, funcional y operacional

por

ANTONIO CALAFELL CASTELLÓ
Catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid

SUMARIO:

I) INTRODUCCIÓN

La *Teoría lineal de la Contabilidad* fue expuesta por nosotros en el Congreso Internacional de Contabilidad de París, en un documento mineográfico, cuyo número de ejemplares distribuidos fue superior a los dos mil. En España la publicamos en la *Revista Técnica del Instituto de Censores Jurados de Cuentas,* en el número 3 de julio-agosto de 1967.

Desde entonces hemos profesado varios seminarios de doctorado y de formación de profesores en el Departamento de Contabilidad de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, siendo citada (y expuesta sin citar) en tesis y trabajos científicos, recogida en obras de autores españoles, pero su desarrollo no ha adelantado lo que hubiéramos deseado sin saber a manera cierta el por qué.

Nosotros esperábamos que diferentes autores desarrollasen las partes específicas que detallamos en nuestra lección magistral de oposición a Cátedra de Universidad, cuyos cientos de ejemplares han sido distribuidos entre alumnos y profesores de toda España, pero sin que ningún estudioso haya sentido la necesidad de acompañarnos en el quehacer de desarrollar estos principios fundamentas de la Contabilidad.

Se han enriquecido nuestros puntos de conocimientos con los *principios* (?) *generalmente aceptados* de la auditoría, con las normas de la Cuarta Directiva, demasiado desprovistas de fondo económico, con esquemas de circulación no siempre bien conceptuados, etc., pero no se ha profundizado en los *principios* para que España pueda ocupar un lugar preeminente en las investigaciones de la Contabilidad.

Con el fin de que sirva de acicate, ofrecemos al lector con preparación matemática actual (y pedimos perdón a los demás) la continuación de nuestras investigaciones, que a no tardar esperamos que puedan publicarse en otra forma y con mayor extensión y generalidad.

II) Modelos matemáticos de las transacciones

1. *Ecuaciones que se derivan de la tabla de transacciones*

De la fila i de la tabla:

$$X_{i1}+X_{i2}+\ldots+X_{ij}+\ldots+X_{in}+Y_i=X_i^H$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}+Y_i=X_i^H \qquad [1]$$

De la columna j de la tabla:

$$X_{1j}+X_{2j}+\ldots+X_{ij}+\ldots+X_{nj}+Z_j=X_j^D$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}+Z_j=X_j^D \qquad [2]$$

Por consiguiente, *de la tabla de transacciones* deducimos:

$$\boxed{\sum X_{ij}+Y_i=X_i^H} \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [3]$$

$$\boxed{\sum X_{ij}+Z_j=X_j^D} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [4]$$

2. *Notación matricial del sistema de ecuaciones*

Operaremos sobre el sistema [3] (si bien idénticos resultados obtendríamos con [4]).

Consideremos, en primer lugar, *los coeficientes técnicos* o *de composición*

$$\boxed{x_{ij}^H=\frac{X_{ij}}{X_i^H}} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [5]$$

De [5] deducimos

$$X_{ij}=x_{ij}^H\ X_i^H \qquad [6]$$

y sustituyendo [6] en [3], resulta:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{H} \; X_{i}^{H} + Y_{i} = X_{i}^{H} \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

es decir,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{H} \right) X_{i}^{H} + Y_{i} = X_{i}^{H}$$

Haciendo

$$\boxed{a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{H}} \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad [7]$$

nos queda *el sistema* [3] como sigue

$$\boxed{a_{ii} \, X_{i}^{H} + Y_{i} = X_{i}^{H}} \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad [8]$$

Considerando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [9]$$

y los vectores

$$\vec{X}^{H} = \begin{bmatrix} X_{1}^{H} \\ X_{2}^{H} \\ \ldots \\ X_{n}^{H} \end{bmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1} \\ Y_{2} \\ \ldots \\ Y_{n} \end{bmatrix} \qquad [10]$$

la notación matricial del sistema [3] *es:*

$$\boxed{A\vec{X}^{H} + \vec{Y} = \vec{X}^{H}} \qquad [11]$$

También, considerando la matriz unidad

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

la ecuación matricial [11] *puede escribirse:*

$$\boxed{(I-A)\vec{X}^H=\vec{Y}} \qquad [12]$$

siendo $I-A$ la matriz

$$I-A=\begin{bmatrix} 1-a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [13]$$

3. *Valores posibles de los elementos de la matriz* A: *modelos cerrado y abierto*

De [7] y [5] deducimos:

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^H=\sum_{j=1}^{n}\frac{X_{ij}}{X_i^H}=\frac{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{X_i^H} \qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n \qquad [14]$$

Puesto que

$$X_{ij}\geqslant 0 \qquad X^H>0 \qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n \qquad j=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

resulta

$$\boxed{a_{ii}\geqslant 0} \qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n \qquad [15]$$

Si el modelo es cerrado, entonces

$$\vec{Y}_i=0 \qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

el sistema [3] *es*

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=\vec{X}_i^H} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [16]$$

y de [14] y [16] deducimos

$$\boxed{a_{ii}=1} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [17]$$

Por tanto, si el modelo es cerrado, *la matriz* A *es la matriz unidad,* y *la notación matricial del sistema* [3] *carece de interés,* ya que [11] *es*

$$\boxed{X^H=X^H} \qquad [18]$$

Si el modelo es abierto, de [3] deducimos:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=\vec{X}_i^H-\vec{Y}_i \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

y sustituyendo en [14] obtenemos:

$$\boxed{a_{ii}=\frac{X_i^H-Y_i}{X_i^H}} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [19]$$

Por ser el modelo abierto, es

$$\vec{Y}_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [20]$$

por tanto,

$$\boxed{a_{ii}\leqslant 1} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [21]$$

y existirá por lo menos un i *tal que* $Y_i>0$ y, por consiguiente,

$$\boxed{a_{ii}<1} \qquad [22]$$

La ecuación matricial [12] permite expresar el vector $\vec{Y}$ en función del vector $\vec{X}^H$.

Para que se pueda expresar el vector X^H *en función del vector* Y, es decir, para que se pueda despejar X^H, *es condición necesaria y suficiente que la matriz* I−A *sea no singular. Siendo una matriz diagonal* para que sea no singular es condición necesaria y suficiente que sean *distintos de cero todos los elementos de su diagonal principal,* es decir, tiene que cumplirse

$$1-a_{ii}\neq 0 \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

o sea,

$$\boxed{a_{ii}\neq 1} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{23}$$

De [19] deducimos que *solamente se cumplirá* [23] *si*

$$\boxed{Y_i>0} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{24}$$

Si se cumplen las condiciones [24] *o sus equivalentes* [23] *y únicamente en este caso, existirá la matriz inversa*

$$(I-A)^{-1}$$

que será

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-a_{22}} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{1-a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

y por tanto, en este caso, de la ecuación matricial [12] *deducimos la ecuación matricial:*

$$\boxed{\vec{X}^H=(I-A)^{-1}\vec{Y}} \tag{26}$$

que es equivalente a las n *ecuaciones*

$$\boxed{X_i^H=\frac{1}{1-a_{ii}}\,Y_i} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{27}$$

De [15], [21] y [23] deducimos que *en* [27] *las* a_{ii} *cumplen*

$$\boxed{0 \leqslant a_{ii} < 1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [28]$$

III) Representación gráfica de la función

La función [27], anteriormente obtenida, posee los siguientes caracteres:

$$\text{Dominio} \begin{cases} 0 \leqslant a_{ii} < 1 \\ 0 < Y_i < +\infty \end{cases} \qquad \text{Recorrido } \{ 0 < X_i^H < +\infty$$

La gráfica de esta función de 2 variables, es una superficie en el espacio de 3 dimensiones. Para obtener esta superficie veamos:

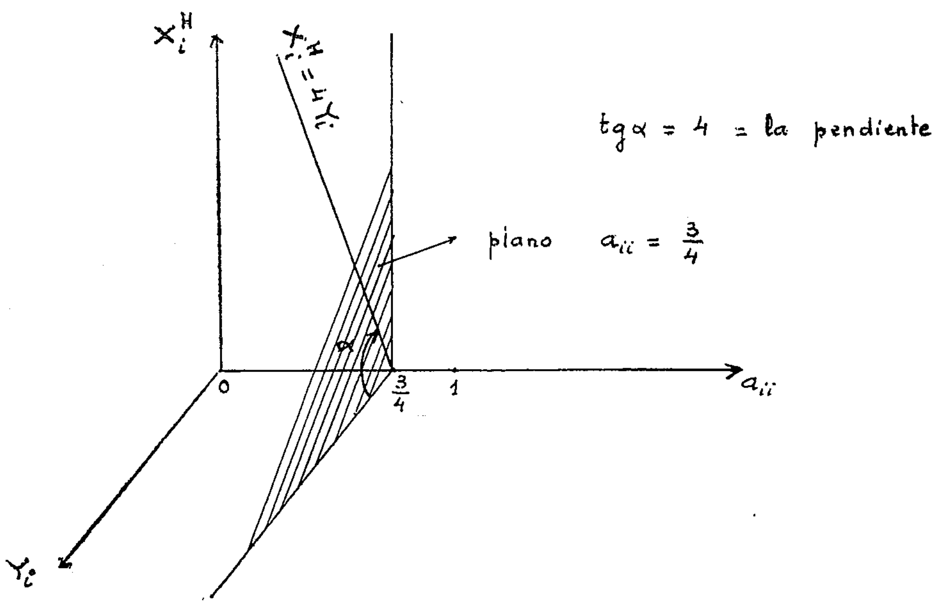
1. *La intersección de esta superficie con un plano perpendicular al eje de las* a_{ii}, es decir, un plano de ecuación

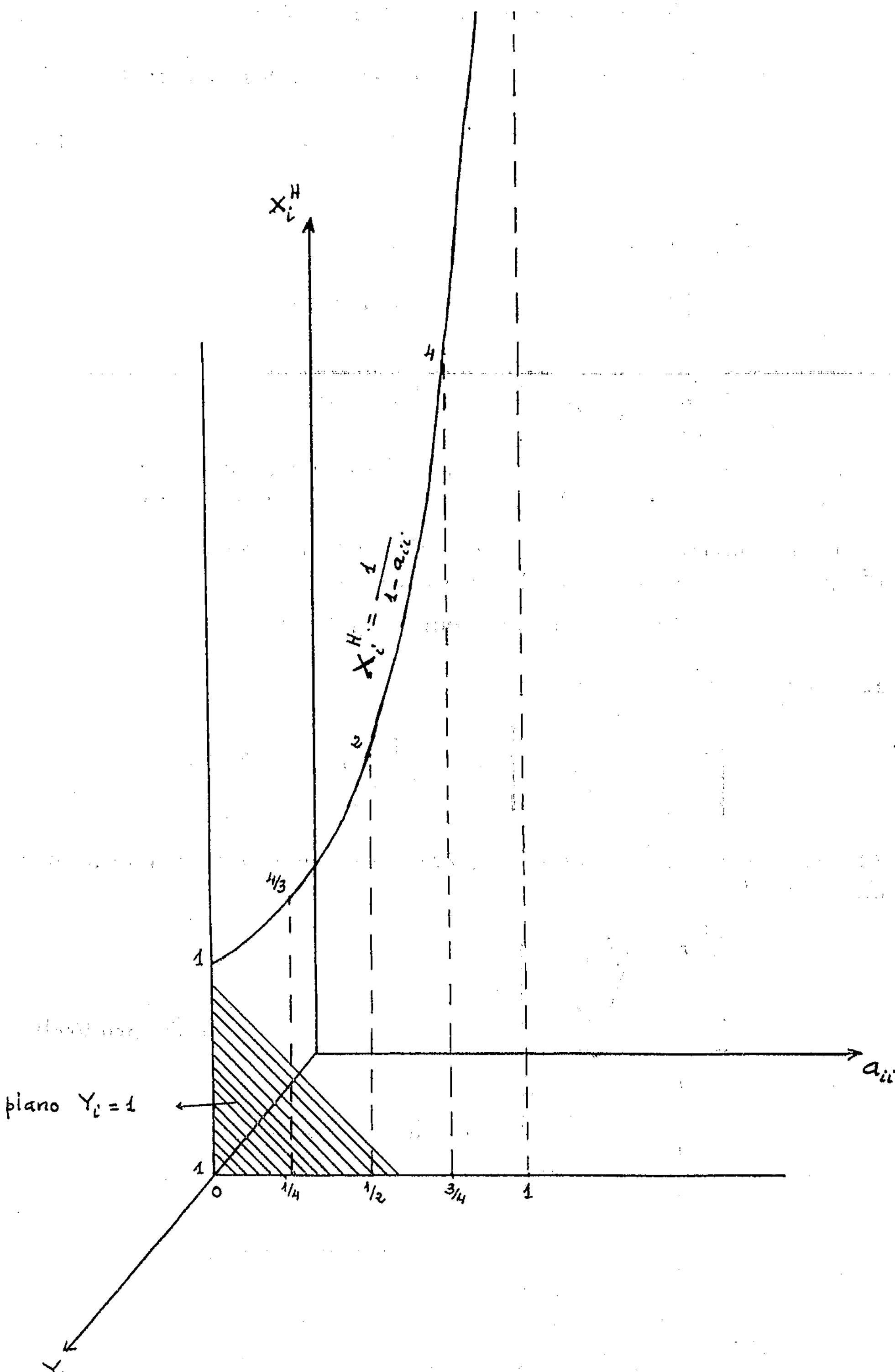
$$a_{ii} = \text{constante}; \qquad \text{por ejemplo, } a_{ii} = \tfrac{3}{4}$$

La intersección será

$$\left[\begin{array}{l} X_i^H = \dfrac{1}{1 - a_{ii}} Y_i \\ a_{ii} = \frac{3}{4} \end{array} \right] X_i^H = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} Y_i \qquad X_i^H = 4\, Y_i$$

Es, pues, *la recta del plano* $a_{ii} = \frac{3}{4}$ *que pasa por el origen y cuya pendiente es* 4.





X_i^H
$X_i^H = \frac{1}{1-a_{ii}}$
4
2
4/3
1
1
plano $Y_i = 1$
0
1/4
1/2
3/4
1
a_{ii}
Y_i

Al variar el plano, es decir, al variar a_{ii}, *variará la pendiente de esta recta,* que es $\frac{1}{1-a_{ii}}$ y, puesto que a_{ii} varía de 0 a 1, la pendiente variará de $\frac{1}{1-0}=1$ a $\frac{1}{1-1}=+\infty$.

2. *La intersección de esta superficie con un plano perpendicular al eje de las* Y_i, es decir, un plano de ecuación Y_i=constante; por ejempro, $Y_i=1$.

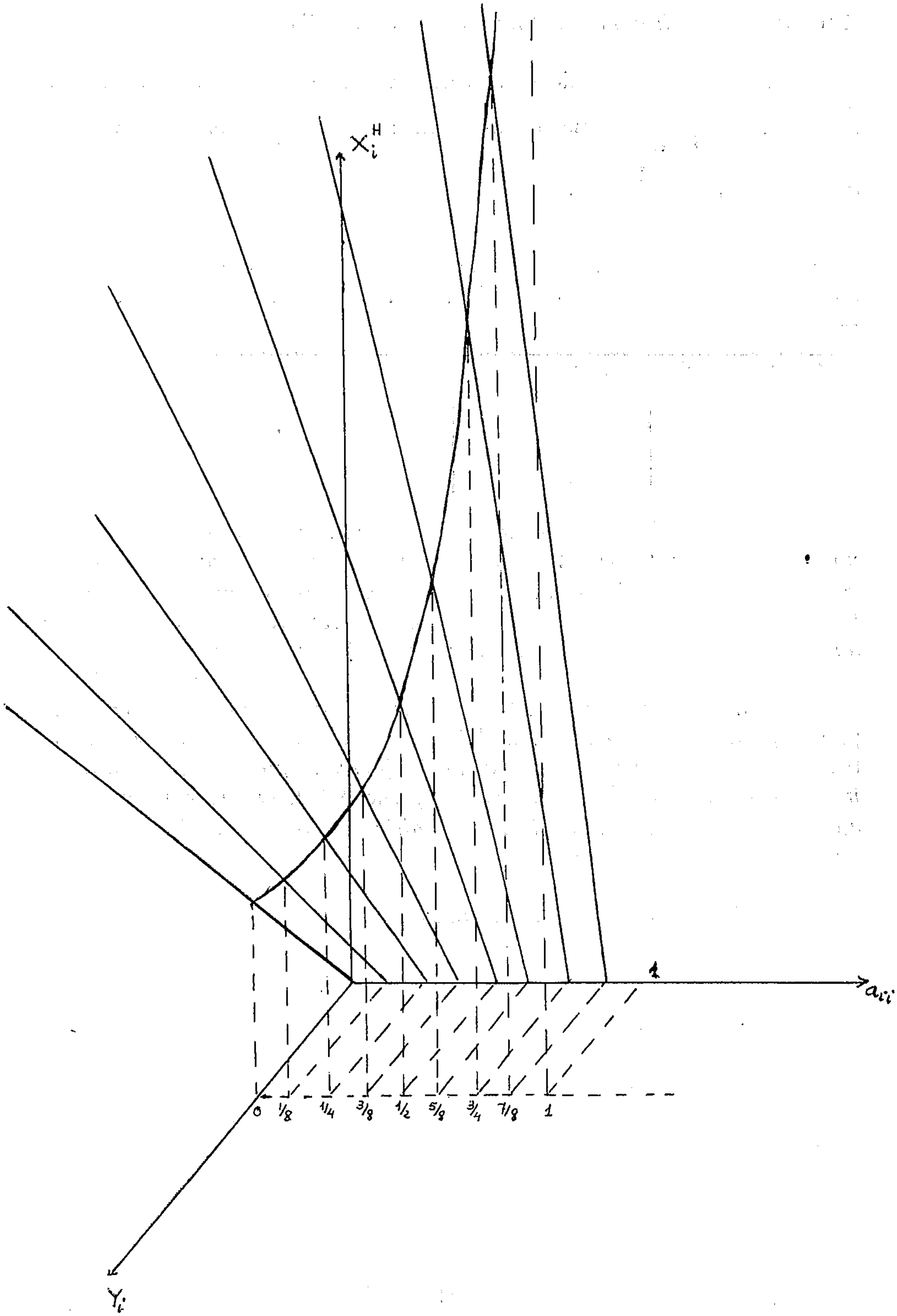
La intersección será

$$\left[\begin{array}{l} X_i^H=\frac{1}{1-a_{ii}}Y_i \\ Y_i=1 \end{array}\right] \qquad X_i^H=\frac{1}{1-a_{ii}}$$

Es, pues, *una curva del plano* $Y_i=1$ *que en el intervalo* $0\leqslant a_{ii}<1$ *pasa por el punto* $a_{ii}=0$, $X_i^H=1$, *es creciente, cóncava y tiene por asíntota vertical la recta* $a_{ii}=1$. *Al variar el plano,* es decir, al variar Y_i *la curva tendrá las mismas características, solamente* variarán *las ordenadas de los puntos de la curva,* que *vendrán multiplicadas por el valor* Y_i.

3. Teniendo en cuenta las intersecciones de la superficie con los planos perpendiculares al eje de las a_{ii} y al eje de las Y_i, vemos que se trata de una *superficie reglada, es decir, formada por rectas. Es el conjunto de todas las rectas paralelas al plano* $Y_iX_i^H$, *que se apoyan en el eje de las* a_{ii} *y en la curva dibujada, gráfica de la intersección de la superficie con el plano* $Y_i=1$.

La gráfica de la superficie es, pues:



X_i^H
1
a_{ii}
0
1/8
1/4
3/8
1/2
5/8
3/4
7/8
1
Y_i

IV) DEPENDENCIA LINEAL DE LOS FONDOS O STOCKS DE PERÍODOS SUCESIVOS

1. *Hipótesis de partida*

Partiremos de la ecuación matricial [11], ya conocida:

a) Con significación $H \rightarrow D$:

$$A^H \vec{X}^H + \vec{Y} = \vec{X}^H \tag{I}$$

en la que

A^H es la matriz diagonal de elementos a_{nn}.

$\vec{X}^H$ es el vector suma de los flujos y fondos del haber.

$\vec{Y}$ es el vector de los fondos, o stocks con significación aditiva del haber (tanto iniciales H, como finales D).

b) Con significación $D \rightarrow H$:

$$A^D \vec{X}^D + Z = \vec{X}^D \tag{II}$$

en la que

A^D es la matriz diagonal de elementos α_{nn}.

X^D es el vector suma de flujos y fondos del debe.

Z es el vector de los fondos, o stocks con significación aditiva del debe (tanto iniciales D, como finales H).

De (I) obtenemos:

$$[I - A^H]\vec{X}^H = \vec{Y} \qquad [29]$$

y

$$X^H = [I - A^H]^{-1} \vec{Y} \qquad [30]$$

De (II) obtenemos:

$$[I - A^D]\vec{X}^D = \vec{Z} \qquad [31]$$

y

$$\vec{X}^D = [I - A^D]^{-1} \vec{Z} \qquad [32]$$

A partir de estas expresiones vamos a sacar las siguientes deducciones:

Como las sumas del H son iguales que las del D, tenemos:

$$\vec{X}^H = \vec{X}^D$$

y, por tanto, podemos igualar las expresiones [30] y [32]:

$$[I-A^H]^{-1}\vec{Y} = [I-A^D]^{-1}\vec{Z}$$

de la cual podemos despejar

$$\vec{Y} = [I-A^D]^{-1}[I-A^H]\vec{Z} \qquad \text{(III)}$$

$$\vec{Z} = [I-A^D]\,[I-A^H]^{-1}\vec{Y} \qquad \text{(IV)}$$

y llamando, para simplificar, al producto $[I-A^D]^{-1}\,[I-A^H] = [P]$ obtendremos, más sencillamente,

$$\vec{Y} = [P]\vec{Z} \qquad \text{(V)}$$

$$\vec{Z} = [P]^{-1}\vec{Y} \qquad \text{(VI)}$$

bastando, por tanto, obtener uno de los productos y hallar después su inversa.

Debemos observar que, tanto $\vec{Z}$ como $\vec{Y}$, contienen fondos iniciales y finales, por lo que en los cálculos con objetivos prospectivos debemos emplear las dos expresiones (V) y (VI), operando solamente con los términos correspondientes a los saldos iniciales (para obtener los finales) considerando nulos los restantes.

2. *Determinación de un operador* K

Para fines prácticos, podemos construir una sola matriz para que sirva como único operador aplicable al total del balance inicial. Para ello seguiremos el siguiente artificio:

Partiendo de (V) podemos efectuar la siguiente partición matricial:

$$\begin{bmatrix} Y_I \\ \hline Y_F \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} [P_{11}] & [0] \\ \hline [0] & [P_{22}] \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} Z_F \\ \hline Z_I \end{bmatrix}$$

que, efectuando operaciones:

$$\begin{bmatrix} \vec{Y}_I \\ \hline Y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}]\vec{Z}_F \\ \hline [P_{22}]Z_I \end{bmatrix}$$

y si estos vectores son iguales, también lo serán:

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_F \\ \hline Y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}]^{-1}\vec{Y}_I \\ \hline [P_{22}]\ Z_I \end{bmatrix}$$

que es tanto como decir que

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_F \\ Y_F \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} [P_{11}]^{-1} & [0] \\ \hline [0] & [P_{22}] \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \vec{Z}_F \\ \hline Y_F \end{bmatrix} \qquad \text{(VII)}$$

con lo que hemos reconstruido una matriz única en (VII) que, para simplificar, llamaremos $[K]$, y a los vectores

$$\begin{bmatrix} Z_F \\ Y_F \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} Y_I \\ Z_I \end{bmatrix}$$

llamaremos, respectivamente, $\vec{E}_F$ y $\vec{E}_I$; con lo que

$$\boxed{\vec{E}_F = [K]\vec{E}_I} \qquad \text{(VIII)}$$

que nos expresa que: *siempre podemos efectuar una aplicación* sobre el vector $\vec{E}_I$ (balance inicial), representada por el operador lineal $[K]$ para obtener un transformado vector $\vec{E}_F$ (balance final).

3. *Efectos acumulativos de la linealidad*

Suponiendo que los *coeficientes de composición* fuesen válidos e invariables para t períodos sucesivos (y, por tanto, el operador K de (VIII)), tendríamos que el balance final del período t sería el resultado de t aplicaciones lineales sucesivas:

Al final del período	1 $\rightarrow$	$KE_0 = E_1$			
» » » »	2 $\rightarrow$	$KE_1 = E_2$	o	$K(KE_0) = E_2$
» » » »	3 $\rightarrow$	$KE_2 = E_3$	o	$K(K(KE_0)) = E_3$
....	....	....	....	....
» » » »	t $\rightarrow$	$KE_{t-1} = E_t$	o	$K(K(\overset{t}{\ldots}(KE_0))) = E_t$

Que en virtud de la propiedad asociativa de las aplicaciones lineales:

$$\boxed{E_t = K^t E_0} \qquad \text{(IX)}$$

4. *Isomorfismo*

Por isomorfismo, en la expresión (IX) vemos que el operador K (generado por los coeficientes de composición a_{nn} y α_{nn}) está formado sobre un dominio D de elementos pertenecientes al conjunto de los términos binomiales del interés compuesto $(1 \pm i)$ en el que i es la *tasa de crecimiento o decrecimiento de los fondos patrimoniales en la unidad de tiempo.*