REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. VI, n. 22
octubre-diciembre 1977
pp. 77-90

APLICACIONES A LA ECONOMIA DE LA EMPRESA DE LA PROGRAMACION LINEAL CONTINUA CUANDO EXISTEN RELACIONES CUALITATIVAS ENTRE LAS ACTIVIDADES ECONOMICAS

Por Ramón M. ARANA

Profesor de Enonomía de la Empresa
de la Universidad de Málaga

SUMARIO:

0.—Objeto y Finalidad. 0.1.—Planteamiento General del Problema. 1.—*Las relaciones cuantitativas y las cualitativas en las aplicaciones de la P. L. a la Economía de la Empresa*. 1.1.—Relaciones cuantitativas entre las actividades económicas en las aplicaciones de la P. L. continua. 1.2.—Relaciones cuantitativas y cualitativas en las aplicaciones de la P. L. bivalente. 1.3.—Relaciones cualitativas entre los vectores de la P. L. continua. 2.—*Planteamiento y resolución de las aplicaciones de la P. L. continua con relaciones cualitativas entre actividades economicas*. 2.1.—Imposibilidad de aplicar en la Programación continua los criterios empleados en la bivalente. 2.2.—Planteamiento de la P. L. continua con relaciones cualitativas entre las actividades económicas. 2.3.—Resolución del problema. 3.—*Conclusión*.

0. OBJETO Y FINALIDAD

En las aplicaciones económicas de la programación lineal (P.L.), los vectores de la matriz de coeficientes representan la estructura de las actividades económicas, en lo referente al consumo de ciertos medios limitados. El sistema de restricciones establece relaciones cuantitativas, la realidad impone con frecuencia otras relaciones de carácter cualitativo (exclusión o incompatibilidad mutua, subordinación, etc.).

Estas relaciones cualitativas son frecuentemente tenidas en cuenta en los planteamientos de la programación lineal entera bivalente, en los que la condición de que las variables puedan adoptar única y exclusivamente alguno de los dos valores 0 ó 1 hace que la inclusión de las relaciones cualitativas sea sencilla.

En el presente artículo se estudia la forma de plantear y resolver problemas de programación lineal con variables contínuas, en los que, además de las relaciones cuantitativas entre las actividades económicas, se tengan presentes otras relaciones de carácter cualitativo, apreciando el tema especialmente con un enfoque de Economía de Empresa.

01. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA

Consideremos el siguiente modelo de P.L., presentado en su forma «standar» (1), y referido al caso de maximización de la función objetivo:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Máx } Z = cx \\ &\text{Sujeto a:} \\ &Ax = b \\ &x \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

La matriz A está formada por «n» vectores a_j de «m» elementos cada uno. El sistema de restricciones, $Ax = b$, establece un conjunto de *relaciones cuantitativas* entre los «n» vectores a_j, que condicionan la solución del problema. Por supuesto, alguna o algunas delas «m» ecuaciones de dicho sistema pueden referirse a sólo dos vectores, determinando entre ellos una relación cuantitativa bilateral.

Asimismo, algunas de tales ecuaciones pueden estar destinadas a señalar un límite máximo o un mínimo del valor de una variable, o nivel en el que figure el correspondiente vector en la solución, utilizando para ello una variable de holgura. En cualquiera de estos casos se trata, insistimos nuevamente, de *relaciones cuantitativas*.

Sin embargo, en algunas ocasiones la realidad a la que se trata de aplicar la P.L. reclama la consideración de ciertas *relaciones cualitativas* (2), tan frecuentemente utilizadas en la programación en números enteros de carácter bivalente, caso al que nos referiremos más adelante. La condición de P.L. bivalente, aunque complique el proceso general de resolución del problema con respecto al utilizado en la programación lineal contínua, facilita y simplifica el planteamiento de relaciones cualitativas. Por esta causa, en la programación bivalente se emplean con mucha frecuencia tales relaciones cualitativas.

Pero téngase en cuenta que es únicamente una razón de facilidad o simplicidad la que induce al uso de estas relaciones en la programación bivalente. No se trata de que la realidad imponga relaciones cualitativas sólo en los problemas de esta naturaleza y que, por el contrario, los casos que admiten variaciones de tipo contínuo

---

(1) En la obra de Simonnard, M., *Programación lineal*, Paraninfo, Madrid, 1972, pp. 29-32, se concreta el proceso que permite transformar entre sí las formas «canónica», «standar» y «mixta».

(2) Escudero se refiere, en el caso de la programación lineal en números enteros de carácter bivalente, a algunas estrictas relaciones «lógicas» entre las variables, en contraposición a otras relaciones «cuantitativas» entre ellas. Véase Escudero, L.F. *Aplicaciones y operativa de las técnicas de Programación Lineal: Contínua, Entera, Mixta y Bivalente*, International Business Machines, Madrid, 1973, pp. 154-155.

en los niveles de todos los vectores estén únicamente sujetos a las relaciones cuantitativas.

1. LAS RELACIONES CUANTITATIVAS Y LAS CUALITATIVAS EN LAS APLICACIONES DE LA P.L. A LA ECONOMIA DE LA EMPRESA

1.1. Relaciones cuantitativas entre las actividades económicas en las aplicaciones de la P.L. contínua a la Economía de la Empresa.

Vamos a referirnos seguidamente al caso más típico de los campos de aplicación de la P.L. a la Economía de la Empresa, de forma que las observaciones que se formulen y las conclusiones que se obtengan en relación con él sean claramente adaptables a otros tipos de aplicaciones. El lector deseoso de conocer más casos de aplicaciones económicas de la P.L. puede consultar los numerosos libros y publicaciones que han sido preparados con esta finalidad o que incluyen uno o varios capítulos orientados a tal fin (3).

Supongamos que se trata de maximizar el margen de beneficio obtenido con «n» tipos de artículos (4), cuya producción se halla sujeta a restricciones, debidas a las limitaciones impuestas por «m» tipos de medios empleados en la elaboración de los productos (5).

En el planteamiento formulado según la expresión [1], cada uno de los vectores a_j (siendo $j = 1, 2, \cdots, n$) es representativo de un tipo de artículos. Cada tipo de artículos a_j precisa para su producción a nivel unitario una cantidad a_{ij} del medio «i». Siendo «m» el número de tipos medios de producción sujetos a limitaciones, «j» puede tomar los valores 1, 2, $\cdots$, m. Cada uno de los «n» elementos x_j del vector columna x es representativo del nivel de producción del correspondiente tipo de artículos.

De acuerdo con estas interpretaciones, el sistema de restricciones $Ax = b$ establece un conjunto de relaciones cuantitativas entre las estructuras a_j de los procesos productivos de los diferentes tipos de artículos, en lo referente al consumo de los «m» medios considerados, los niveles x_j de producción de dichos artículos, y las limitaciones de medios representadas por b.

Este sistema de restricciones puede expresarse también del siguiente modo:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_j x_j + \cdots + a_n x_n = b \qquad [2]$$

Las condiciones de no-negatividad de las variables quedan impuestas por la expresión $x \geq 0$, y el vector fila c que figura en la función objetivo se compone de «n» elementos c_j, cada uno de los cuales es representativo del margen de beneficio unitario del correspondiente tipo de artículos «j».

1.2. Relaciones cuantitativas y cualitativas en las aplicaciones de la P.L. bivalente a la Economía de la Empresa.

Consideremos seguidamente el problema de la elección de inversiones cuando existe

(3) A título de ejemplo pueden citarse los siguientes:

— Gass, S. I.: *Programación Lineal, C.E.C.S.A.*, México, 1972, pp. 291-334.

— Suárez Suárez, A.S., *Aplicaciones económicas de la programación lineal*, Guadiana, Madrid, 1970, pp. 97-204.

— Thierauf, J. y Grosse, R.A., *Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones,* Limusa-Wiley, México, 1972, pp. 270-276.

(4) Realmente «n», número de columnas de la matriz A, es igual al número de tipos de productos a los que afectan las restricciones más el de variables de holgura.

Puesto que, en el caso que estamos considerando, las variables de holgura son representativas de los medios que no se empleen, podemos (a los efectos que ahora nos interesan) dar a dichas variables de holgura el mismo tratamiento que a los tipos de productos.

En estas condiciones, podemos considerar que el número de tipos de artículos es «n».

(5) Panne, C. van de, *Linear programming and related techniques,* North-Holland, Amsterdam, 1971, pp. 17-33.

una limitación de recursos financieros, afrontando este tema con una proyección multiperíodo. Téngase en cuenta, sin embargo, que nuestro interés no se centra principalmente en este problema concreto de selección de inversiones, sino que pretendemos, a través de él, examinar con criterio y sentido de Economía de la Empresa la problemática de las relaciones cuantitativas y de las de carácter cualitativo en la P.L. en números enteros de tipo bivalente (6).

De acuerdo con la formulación de Weingartner (7), la expresión [1] puede aplicarse a este problema si a los símbolos que se indican a continuación se atribuyen las interpretaciones que se señalan seguidamente:

— a_j representa la estructura de pagos exigidos en los diferentes períodos por el proyecto «j», siendo cada una de sus «m» componentes a_{ij} el pago correspondiente a este proyecto en el período «i».
— cada una de las «m» componentes b_i del vector b determina el importe máximo del conjunto de los pagos a realizar en el período «i».
— los elementos c_j del vector c representan el valor actual neto de los correspondientes proyectos «j».
— x_j define la fracción aceptada del proyecto «j».
— las variables de holgura representan la parte de b_i que no se emplea.

De acuerdo con estas interpretaciones, el sistema de restricciones $Ax = b$, que equivale a la expresión [2], establece un conjunto de relaciones cuantitativas entre las estructuras de los proyectos a_j, en lo referente a los pagos exigidos en los diferentes períodos, los niveles o fracciones de aceptación x_j de dichos proyectos, y los importes máximos de los pagos por período representados por b.

Lo indicado hasta aquí respecto a las decisiones de inversión de la empresa ante un contexto dinámico y restrictivo (8) es, a los efectos del tema del presente artículo, semejante a lo señalado en el apartado anterior en relación con las decisiones sobre tipos de artículos cuyos niveles de producción se hallan sujetos a restricciones debidas a las limitaciones de disponibilidad de algunos medios o factores productivos. Ello es debido a que no nos hemos referido aún a las condiciones de bivalencia de las variables.

Si se supusiera que cada uno de los proyectos «j» es perfectamente fraccionable, que puede ser aceptado y llevado a la práctica a cualquier nivel, y que puede asímismo repetirse varias o muchas veces, estaríamos en un caso de programación lineal contínua. Si por el contrario, los proyectos de inversión son de tal naturaleza que han de ser aceptados en su totalidad o rechazados, y no son repetitivos, las variables x_j sólo pueden tomar los valores 0 ó 1. Se trata de variables bivalentes. En este caso, pueden incluirse fácilmente en el emplazamiento algunas relaciones cualitativas, además de las relaciones cuantitativas a que nos hemos referido anteriormente. El propio Weingartner, en

(6) Nos referimos a la programación lineal bivalente considerando el caso de que alguna o algunas de las variables sean bivalentes.

A los efectos que ahora nos interesan no consideramos necesario distinguir entre la programación lineal «bivalente» y la «mixta», entendiendo por esta última la que se refiere al caso de que algunas variables sean bivalentes y otras variables sean contínuas.

Los razonamientos que expondremos seguidamente son válidos para la programación lineal bivalente y también para la programación lineal mixta en lo referente a las variables que tengan el carácter de bivalentes.

(7) Weingartner, H., *Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis,* Management Science, XII, marzo 1966, pp. 485-516.

Hya traducción española de este artículo incluida en el libro *Teoría de la financiación de la empresa,* recopilación de Weston, J. y Woods, H., Gustavo Gili, Barcelona, 1970, pp. 109-150.

(8) Suárez Suárez, S., *Economía de la Empresa (Organización y Administración),* Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 1975, Unidad Didáctica 5, Tema XXII.

su artículo antes citado, consideró las relaciones de exclusión o incompatibilidad mutua, de subordinación, de exclusión mutua y subordinación respecto a terceros, y de subordinación concatenada.

Siendo J el conjunto de los proyectos mutuamente excluyentes entre sí, de los cuales sólo puede ser seleccionado uno, ha de cumplirse la siguiente condición:

$$\sum_{j \in J} x_j \leqslant 1 \qquad [3]$$

Efectivamente, todas las variables x_j, tales que «j» pertenezca al conjunto J, han de tomar en la solución del problema el valor 0 ó el 1. Por lo tanto, la expresión [3] sólo se cumplirá cuando todas ellas sean nulas, o cuando a una de dichas variables se asigne el valor 1 y las restantes sean nulas.

En cuanto a la relación de subordinación, si un proyecto de inversión «r» sólo puede ser llevado a cabo en el caso de que también se realice otro «s», esta condición puede ser expresada de la siguiente manera:

$$x_r \leqslant x_s \qquad [4]$$

Esta expresión impone la exigencia de que, si x_s figura en la solución del problema con valor 0, también x_k ha de ser nula. En cambio, si x_s es igual a 1, en tal caso x_r puede tomar tanto el valor 0 como el 1.

Puesto que según se ha indicado ya, el valor de la variable indica la fracción o tanto por uno aceptado del proyecto correspondiente, el valor nulo atribuido a una variable equivale a rechazo del proyecto y, por el contrario, el hecho de que la variable tome el valor 1 representa la aceptación de la totalidad del mismo.

Si la variable x_s sólo figura en una expresión del tipo de la representada en [4], la decisión sobre aceptación o rechazo del proyecto «s» es independiente de las decisiones sobre los demás proyectos, salvo en lo referente a las relaciones cuantitativas entre ellos debidas a la limitación de los pagos por período.

Si, por el contrario, la realización de «s» no fuera posible a menos de que sellevase a cabo otro proyecto «u», estaríamos en presencia de una relación de subordinación concatenada, que quedaría expresada del siguiente modo:

$$x_r \leqslant x_s$$
$$x_s \leqslant x_u$$

Por supuesto, pueden producirse casos de exclusión mutua entre dos o más proyectos unidos a relaciones de subordinación ante terceros.

Sean «r» y «s» dos proyectos mutuamente excluyentes, sujetos a la condición de que para la realización de alguno de ellos sea preciso que se lleve a cabo alguno de los proyectos «u» ó «v». Estas condiciones pueden representarse mediante las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} x_r + x_s \leqslant 1 \\ x_r + x_s \leqslant x_u + x_v \end{array}\right\} \quad [5]$$

Naturalmente, las anteriores condiciones pueden ir unidas a la de exclusión o incompatibilidad mutua entre «u» y «v», para cuya representación bastaría añadir a la expresión [5] la siguiente:

$$x_u + x_v \leqslant 1$$

Además de estas relaciones cualitativas expuestas por Weingartner (9), se han con-

(9) Además de Weingartner en su artículo citado anteriormente, otros muchos autores se han referido a las relaciones cualitativas en la programación bivalente.

A título de ejemplo, pueden consultarse las siguientes obras:

— Prieto Pérez, E., *Teoría de la Inversión,* ICE, Madrid,, 1973.

— Suárez Suárez, S., *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa,* Pirámide, Madrid, 1976, pp. 266-267.

— Mao, C.T., *Análisis financiero,* El Ateneo, Buenos Aires, 1974, pp. 211-213.

siderado por otros autores diversas relaciones que se basan en fundamentaciones semejantes.

La necesidad de que, de un conjunto de proyectos J deban seleccionarse precisamente «e» proyectos puede representarse mediante la siguiente expresión (10):

$$\sum_{j \in J} x_j = e \qquad [6]$$

Si no es necesario que sean precisamente «e», sino que han se ser al menos «e», bastará sustituir en [6] el signo = por el $\geqslant$.

También puede ocurrir que la realización del proyecto «s» implique la necesidad de puesta en práctica de los «r» proyectos del conjunto R, puesto que existen ciertas relaciones de complementariedad.

La expresión correspondiente es (11):

$$-r \cdot x_s + \sum_{j \in R} x_j \geqslant 0 \qquad [7]$$

Efectivamente, sólo cuando todas las x_j correspondientes a las «j» del conjunto R tomen el valor 1 podrá cumplirse [7] siendo $x_s = 1$. Si alguna de dichas x_j es nula, también habrá de ser nula x_s.

Naturalmente, esta relación de complementariedad puede también establecerse mediante expresiones del tipo [4] de la siguiente manera, suponiendo que los «r» elementos del conjunto R son 1,2,. . .,r:

$$x_1 \geqslant x_s$$

$$x_2 \geqslant x_s$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_r \geqslant x_s$$

Sin embargo, la [7] expresa estas mismas condiciones de forma más sencilla.

(10) Zionts, S., *Linear and integer programming*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974, pp. 322-329.

(11) Agostini, J.M., *Le choix des investissements*, Dunod, París, 1972, pp. 67-68.

1.3. Relaciones cualitativas entre los vectores de la P.L. contínua.

Entre las actividades económicas de diverso tipo que pueden quedar representadas por los vectores de la matriz de coeficientes A en un problema de P.L. contínua pueden existir en la realidad relaciones de carácter cualitativo, como las de exclusión o incompatibilidad mutua, de subordinación, de incompatibilidad mutua y simultáneamente de subordinación respecto a terceros, y de subordinación concatenada, a las cuales acabamos de referirnos considerándolas en el caso de la P.L. bivalente.

Dos o más actividades cuyas variables sean contínuas pueden ser incompatibles entre sí, o pueden serlo a partir de un cierto nivel. Tal puede ser el caso de que, si de alguna de ellas se realiza al menos la mitad de la misma (12), otra u otras deban quedar absolutamente excluidas. Nos encontraríamos ante un caso de exclusión o incompatibilidad mutua semejante, al menos en cierto modo, al examinado respecto al caso de programación bivalente. Esta semejanza se refiere al concepto en sí, pero no al modo en que tal tipo de relaciones podría ser incluido en el planteamiento de la P.L. contínua.

En este apartado nos limitaremos a poner de manifiesto el concepto de ciertas relaciones cualitativas en la P.L. contínua, sin referirnos a su forma de inclusión en el planteamiento, ya que este tema, así como el proceso de resolución de los problemas de variables contínuas con estos tipos de relaciones, será tratado en la segunda parte de este artículo.

Se presentan relaciones de subordinación en la P.L. con variables contínuas cuando una o varias actividades no pueden comenzarse a menos de que hayan sido

(12) El hecho de que se haga referencia a, como mínimo, la mitad, o cualquier otro nivel, de una actividad no impide que dicha actividad pueda ser repetitiva, y que por lo tanto el nivel o la intensidad de la misma que se adopte en la solución pueda ser superior a la unidad.

realizadas otra u otras, o que ésta o éstas hayan sido llevadas a cabo al menos hasta un cierto nivel o grado. En relación con esta cuestión, puede ocurrir que la decisión respecto a la realización de la actividad a la que otra quede subordinada sea independiente del resto, excepto en cuanto a las relaciones cuantitativas debidas a los medios limitados, o bien puede ocurrir que dicha actividad esté a su vez subordinada a la realización de otra u otras, y así sucesivamente. En el primer caso nos encontraríamos ante una relación de subordinación simple, y en el segundo caso se trataría de una cadena de subordinaciones, o una relación de subordinación concatenada.

De forma semejante a lo examinado respecto a la programación bivalente, en la P.L. continua pueden presentarse simultáneamente problemas de incompatibilidad mutua entre dos o más actividades y de subordinación de éstas respecto a otro grupo de actividades, estén o no estas últimas sujetas a incompatibilidad o exclusión mutua.

2. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCION DE APLICACIONES DE LA P.L. CONTINUA A LA ECONOMIA DE LA EMPRESA, CON RELACIONES CUALITATIVAS ENTRE ACTIVIDADES ECONOMICAS.

2.1. Imposibilidad de aplicar en la programación contínua los criterios empleados en la bivalente.

La inclusión de relaciones cualitativas en el planteamiento de la programación bivalente se efectúa mediante ecuaciones o inecuaciones. Realmente lo que se incluyen son relaciones cuantitativas, que, dada la condición de bivalencia de las variables, equivalen a relaciones cualitativas. Teniendo en cuenta esta condición de bivalencia de las variables, basta que en la expresión [3] una cualquiera de las x_j del conjunto de los proyectos J no sea nula para que queden por ello determinados todos los valores de las variables correspondientes a J. Efectivamente, el hecho de no ser nula una variable que sólo puede tomar los valores 0 ó 1 exige, naturalmente, que dicha variable deba ser igual a 1, y en virtud de la expresión [3] todas las demás deberán ser nulas.

Asímismo, el examen de la expresión [4] queda completo, en cuanto a las exigencias que impone x_s, al considerar únicamente las dos alternativas siguientes: x_s sea nula o que tome el valor 1. La primera alternativa equivale a una exigencia de valor nulo para la variable x_r, y la segunda no implica exigencia ni limitación alguna a x_r, ya que, por su condición de variable bivalente, no podría tomar un valor superior a 1 aún en el caso de que no existiera la restricción [4]. Naturalmente, el hecho de que x_r fuera igual a 1 impondría la necesidad de que también x_s adoptara el valor 1. Los razonamientos correspondientes a las relaciones cualitativas impuestas por la expresiones [5], [6] y [7] son semejantes a los que acabamos de exponer y se basan fundamentalmente en la imposibilidad de que las variables tomen valores distintos de 0 ó 1.

En el caso de la P.L. contínua, las relaciones establecidas por las expresiones [3] a [7] son inevitablemente de tipo cuantitativo, sin que exista la posibilidad de que pierdan tal carácter para transformarse en relaciones cualitativas. El cumplimiento de la expresión [3] cuando se trata de programación contínua puede efectuarse mediante valores positivos de una, varias o todas las actividades «j» del conjunto J . La no nulidad de una de las variables correspondientes a las actividades de este conjunto no determina, por supuesto, el valor de las restantes. Incluso, aunque [3] impone la necesidad de que, cuando una de tales variables tome el valor 1, las restantes sean nulas, debido a las condiciones de no-negatividad de las variables, dicha expresión [3] establece, además de ello, la relación cuantitativa consistente en que ninguna de las variables individualmente ni la suma de todas ellas puede adoptar un valor superior a 1.

En cuanto a [4], también en la programación contínua establece una relación subordinación de la actividad «r» a la «s», en el sentido de que si x_s es nula también ha de serlo x_r. Pero, no impone únicamente esta relación de subordinación, sino también otra de carácter cuantitativo, consistente en que cualquiera que sea el valor que tome la variable x_s éste ha de ser igual o mayor que el de x_r.

Los criterios seguidos para el establecimiento de relaciones cualitativas en la programación bivalente no son válidos en la programación contínua, en unos casos porque realmente no imponen tales relaciones cualitativas, y en otros porque no es posible separar dichas relaciones de otras de tipo cuantitativo que también quedarían introducidas necesariamente, a pesar de que la realidad empresarial y la realidad económica en general imponen a veces entre las actividades ciertas relaciones cualitativas no vinculadas a las relaciones cuantitativas que, de acuerdo con esta forma de proceder, quedarían también establecidas, sin posibilidad de eliminarlas.

2.2. Planteamiento de la P.L. contínua con relaciones cualitativas entre las actividades económicas.

Consideremos un problema planteado en los siguientes términos:

Se trata de un planteamiento de P. L. paramétrica. Los parámetros quedan distribuidos en diferentes grupos: el grupo de los α_{g_1}, siendo g_1 los elementos del conjunto G_1, el grupo de los α_{g_2}, siendo g_2 los elementos del conjunto G_2 ··· y, de una forma general, el grupo de los α_{g_j}, siendo g_j los elementos del conjunto G_j, hasta el grupo de los parámetros α_{g_n}. La suma de los parámetros correspondientes a un grupo G_j, multiplicado cada uno de ellos por un coeficiente a_{ig_j}, constituye el coeficiente paramétrico de la variable x_j en la restricción «i». Es decir, el coeficiente paramétrico de x_j en la restricción «i» es

$$\sum_{g_j \in G_j} a_{ig_j} \alpha_{g_j}.$$

Esta expresión puede estar formada por varios sumandos, por contener más de un parámetro, o puede ser simplemente un número, por no estar esa variable x_j afectada por ningún parámetro variable. Queremos con ésto destacar el hecho de que, aunque el planteamiento formulado en [8], corresponde al caso general y admite por ello la posibilidad de que todas las variables x_j estén afectadas por coeficientes paramétricos con parámetros variables, ello no impide que algunos vectores de la matriz de coeficientes no queden afectados por ningún parámetro variable.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Máx } Z = \sum\limits_{g_1 \in G_1} c_{g_1} \alpha_{g_1} x_1 + \sum\limits_{g_2 \in G_2} c_{g_2} \alpha_{g_2} x_2 + \cdots + \sum\limits_{g_n \in G_n} c_{g_n} \alpha_{g_n} x_n \\
\text{Sujeto a} \\
\sum\limits_{g_1 \in G_1} a_{ig_1} \alpha_{g_1} x_1 + \sum\limits_{g_2 \in G_2} a_{ig_2} \alpha_{g_2} x_2 + \cdots + \sum\limits_{g_n \in G_n} a_{ig_n} \alpha_{g_n} x_n = b_i \\
\qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
x_j \geqslant 0 \; ; \quad \alpha_{g_j} \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}\right\} \quad [8]$$

El vector paramétrico de una variable x_j será de la siguiente forma:

$$\sum_{g_j \in G_j} a_{g_j} \alpha_{g_j} = \begin{bmatrix} \sum_{g_j \in G_j} a_{1g_j} \alpha_{g_j} \\ \sum_{g_j \in G_j} a_{2g_j} \alpha_{g_j} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{g_j \in G_j} a_{m\,g_j} \alpha_{g_j} \end{bmatrix} \qquad [9]$$

siendo a_{g_j} un vector columna de «m» elementos del tipo a_{ig_j} $(i = 1,2,\ldots,m)$, y habiendo tantos vectores a_{p_j} como elementos g_j tenga el conjunto G_j.

El vector no variable correspondiente a una variable x_h será de la siguiente forma:

$$a_h = \begin{bmatrix} a_{1h} \\ a_{2h} \\ \vdots \\ a_{mh} \end{bmatrix} \qquad [10]$$

Los coeficientes de la función objetivo de [8] afectados por el valor de los parámetros variables tomán la forma

$$\sum_{g_j \in G_j} c_{g_j} \alpha_{g_j}.$$

Los vectores no variables, como el cocorrespondiente a x_h representado en [10], tendrán un coeficiente de la función objetivo de la forma c_h.

En el planteamiento [8], además de las condiciones de no-negatividad de las variables, se han establecido las condiciones de no-negatividad de los parámetros. Una vez que hemos explicado el planteamiento formulado en]8], veamos su relación con el tema que ahora nos ocupa.

Dado el planteamiento de un problema de P.L. contínua, que determina las relaciones cuantitativas entre los vectores o actividades económicas, si se desea intrducir además de ellas otras relaciones de carácter cualitativo, puede actuarse del siguiente modo:

— se forman grupos de actividades económicas, en cada uno de los cuales se integran las que se hallan ligadas entre sí por relaciones cualitativas.
— se sustituyen las variables de las actividades económicas o vectores de cada grupo G_j por parámetros α_{g_j}, tales que $g_j \in G_j$.
— se afecta a cada uno de estos grupos una variable x_j.

El problema inicial de la programación lineal ha quedado transformado en uno que presenta un planteamiento de la forma]8], teniendo en cuenta que el valor de la variable correspondiente a cada vector del problema inicial ha quedado sustituido por el producto de un parámetro específico de ese vector multiplicado por una variable afecta al grupo de parámetros en el que queda integrado dicho vector. De esta forma, la problemática de las relaciones cualitativas entre actividades económicas representadas por vectores queda transformada en la de este tipo de relaciones entre parámetros que configuran los elementos constitutivos de un mismo vector.

2.3. Resolución del problema.

Puede parecer que, con la transformación de un planteamiento normal de P.L. contínua en otro que adopte la forma expuesta en [8], se introduce una gran complicación y se aumenta mucho la dificultad de su resolución. Es sabido que son bastantes los autores que han estudiado la parametrización de los coeficientes de la función objetivo y la de los términos independientes del sistema de restricciones (13), pero en cambio son muy escasos los estudios sobre parametrización de los vectores de la matriz de coeficientes cuando el parámetro o los parámetros afectan a algún vector básico. Algunos autores, como

(13) Véase a título de ejemplo, la bibliografía que figura en el artículo de Gal, T. y Nedoma, J., *Multiparametric Linear Programming*, Management Science, vol. 18, N.º 7, marzo 1972, pp. 406-422.

Maurin (14), han examinado ejemplos concretos de parametrización de los vectores de la matriz de coeficientes. Pero faltan estudios y fórmulas o procedimientos de aplicación general. Muchos autores (15) han proclamado la complejidad de la parametrización de vectores básicos de la matriz de coeficientes.

Simonnard (16) ha analizado este tipo de parametrización, pero concretándose exclusivamente al caso de que un parámetro afecte a un solo elemento de un vector de la matriz de coeficientes, llegando a afirmar que el caso de parametrización de la matriz de coeficientes «no se presta a una discusión sistemática» semejante a la de los casos de parametrización de los coeficientes de la función objetivo y de los términos independientes del sistema de restricciones.

El autor del presente artículo ha determinado los valores críticos de un parámetro que afecta a uno, varios o todos los coeficientes de un vector básico de la matriz de coeficientes, habiendo extendido posteriormente el enfoque empleado en este tema a la resolución de un tipo especial de aplicaciones de la Programación lineal a problemas económicos (17). Ahora bien, en cuanto a la resolución del problema formulado en [8], puede seguirse el criterio de considerarlo como un problema de P. L. continua de tipo normal salvo en el hecho de que en [8] el número de vectores de la matriz de coeficientes A es infinito, teniendo en cuenta la variedad posible de vectores según los valores que se asignen a los parámetros. La resolución de este caso, como ocurre en los problemas de P.L. contínua, consiste en la selección de los «m» vectores que hagan máximo el valor de la función objetivo. Para ello se comienza asignando un valor en concreto a cada parámetro, pudiendo naturalmente atribuir valor nulo a algunos o a muchos de ellos, y calculando una base posible o realizable del planteamiento que resulte al actuar de este modo.

Supongamos que los vectores básicos son precisamente los «m» primeros (18), es decir, los vectores

$$\sum_{g_1 \in G_1} a_{g_1} \alpha_{g_1}, \quad \sum_{g_2 \in G_2} a_{g2} \alpha_{g_2}, \ldots,$$

$$\sum_{g_m \in G_m} a_{g_m} \alpha_{g_m}.$$

expresiones en las cuales los parámetros toman los valores que se han atribuido a los mismos, de acuerdo con lo indicado en el párrafo anterior.

Al calcular la citada base posible o realizable, se habrá determinado, siguiendo un proceso totalmente semejánte al que suele emplearse en un problema normal de P.L., lo que se indica a continuación:

— los vectores que denominaremos y_j, entendiendo por tales los que tienen como elementos las respectivas componentes de los vectores de la matriz de coeficientes pero referidos ahora a la base posible o realizable calculada. Es decir,

$$y_j = \sum_{g_j \in G_j} \alpha_{g_j} B^{-1} a_{g_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

siendo B la matriz cuyas columnas son los «m» vectores de la base realizable.

(14) Maurin, *Parametrisation Générale d'un Programme Lineáire,* Tesis presentada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de París el 19 de junio de 1963.

(15) Véanse, a título de ejemplo, los siguientes:
— Zionts, op. cit., p. 164.
— Suárez, *Aplicaciones económicas...,* op. cit., p. 57.
— Panne, op. cit., p. 105.

(16) Simonnard, op. cit., pp. 215-217.

(17) Arana, R.M., *Programming with parametric elements of the matrix coefficients,* Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle, R.A.I.R.O., vol. 11, n.º 2, 1977, pp. 233-238. y «Programming with some linear and one quadratic economic activities», artículo aprobado para su publicación en Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle (Bruselas).

(18) Esta suposición simplifica las notaciones, y no afecta al carácter general de los razonamientos ni de las deducciones. En todo caso, los vectores de la matriz de coeficientes pueden ser convenientemente ordenados después de hallar sus componentes con relación a una nueva base.

Cada uno de los elementos del vector y_j, siendo y_{ij} el elemento correspondiente a la fila «i», será

$$y_{ij} = \sum_{g_j \in G_j} \alpha_{g_j} \beta_i a_{g_j} \qquad [11]$$

en donde β_i es el vector fila cuyas componentes son los elementos de la fila «i» de la matriz B^{-1}.

— el beneficio marginal correspondiente a cada uno de los vectores. Designamos como w_j el correspondiente al vector «j».

— los valores x_i, componentes del vector b respecto a la base realizable que se está considerando.
Los valores x_i son los elementos del vector $x_B = B^{-1}b$. Es decir, $x_i = \beta_i b$.

En la tabla que contiene los datos referidos a una base realizable figurarán «m» vectores básicos y (n−m) vectores no básicos. Es decir, esta tabla contendrá:

— «m» vectores

$$y_j = \sum_{g_j \in G_j} \alpha_{g_j} B^{-1} a_{g_j} \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

en los cuales el beneficio marginal es

$$w_j = \sum_{g_j \in G_j} c_{g_j} \alpha_{g_j} - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{g_i \in G_i} c_{g_i} \alpha_{g_i} \right) y_{ij} \qquad [12]$$

estando y_{ij} determinada por [11].
La expresión]12] será nula es estos «m» vectores básicos para los valores atribuidos a los parámetros.

— (n−m) vectores

$$y_j = \sum_{g_j \in G} \alpha_{g_j} B^{-1} a_{g_j}$$

$$[j = (m+1), (m+2), ..., n]$$

para los cuales el beneficio marginal queda determinado por la expresión [12].

Una vez calculada la base realizable, puede ocurrir que ninguna de las expresiones [12] (para j=1, 2, ..., n) pueda llegar a ser positiva aunque se modifiquen los valores parámetros, seleccionando en cada caso los que permitan obtener el máximo valos de dicas expresiones [12]. En tal caso, la base realizable calculada sería la base óptima y el problema [8] habría quedado resuelto. Por el contrario, si dicha base realizable no es la óptima, nos encontramos ante alguno de los dos siguientes casos:

a) Mediante una asignación de valores de los parámetros asociados a un vector no básico distinta de la anteriormente prevista puede conseguirse que la expresión [12] de dicho vector sea positiva. En este caso, el valor de la función objetivo puede ser incrementado introduciéndo en la base dicho vector no básico, y extrayendo de ella el correspondiente vector básico.

b) Mediante una asignación de valores de los parámetros asociados a un vector básico distinta de la anteriormente prevista puede conseguirse que la expresión [12] de dicho vector sea positiva.

Consideremos seguidamente ambos casos:

Caso a) Se seleccionará la combinación de valores de los parámetros asociados a un vector no básico que haga máxima la expresión [12].

El vector «j» correspondiente será introducido en la base, siguiendo el proceso usual en los problemas de P.L., a un nivel igual al menor valor positivo de la expresión:

$$\frac{x_i}{y_{ij}} \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

Téngase en cuenta que, en este caso, y_{ij} es tunción de los parámetros α_{g_j} correspondientes al conjunto Gj, tal como lo pone de manifiesto [11].

Caso b) Se seleccionará la combinación de valores de los parámetros asociados a un vector básico que haga máxima la expresión [12].

El vector «j», que en este caso b) que estamos considerando ya era básico, deberá continuar en la base, pero ahora (con la nueva combinación de valores de los parámetros) su nivel debe ser el menor valor positivo de la expresión $\frac{x_i}{y_{ij}}$, teniendo en cuenta en el cálculo de y_{ij} dicha nueva combinación de valores de los parámetros.

Este caso puede, a su vez, dividirse en dos según que la fila «i» en la que se produce el menor valor positivo de $\frac{x_i}{y_{ij}}$ coincida o no con la fila en que este vector básico tenía (con la antigua combinación de valores de los parámetros) la componente unitaria.

En el caso de que haya coincidencia entre ambas filas, deberá extraerse de la base este vector con la antigua combinación de valores de los parámetros, e introducirse el mismo vector paramétrico (o, expresándonos con mayor tigor, un vector con la misma estructura paramétrica que el que se extrae) pero transformado por haberse adoptado la nueva combinación de los valores de los parámetros.

En el caso de que, por el contrario, la fila «i» en la que tiene lugar el menor valor positivo de $\frac{x_i}{y_{ij}}$ no corresponda a la fila en que este vector básico tenía la componente unitaria, es decir, corresponda a una fila en que la componente era nula, en vector básico transformado por haberse adoptado una nueva combinación de valores de los parámetros debe ser introducido en la base; pero ahora el vector que haya de extraerse de la base no será este mismo vector paramétrico afectado de la antigua combinación de valores de los parámetros, sino algún otro vector básico, concretamente el que tenga su componente unitaria en la fila «i» en que se produce el menor valor positivo de $\frac{x_i}{y_{ij}}$.

En este caso formarán parte de la base dos vectores que figuran en [8] con la misma estructura paramétrica, pero en los que se adoptan distintas combinaciones de valores asignados a los parámetros.

El proceso de resolución quedará terminado cuando se haya alcanzado una tabla en la que no exista ningún caso de los considerados en *a*) y en *b*).

3. Conclusión.

Esta forma de planteamiento y de resolución permite introducir relaciones cualitativas entre los vectores, además de las relaciones cuantitativas establecidas en [8] que cada grupo de relaciones cualitativas no deba ser considerado dentro del conjunto total del problema, quedando ligada por lo tanto cada una de dichas relaciones cualitativas a otras del mismo carácter dentro del mismo grupo de vectores, al conjunto general de las relaciones cuantitativas y a las diversas relaciones cualitativas existentes dentro de otros grupos de vectores.

Con esta forma de planteamiento se pueden aislar en cada fase del proceso de resolución las relaciones cuantitativas y cualitativas de cada uno de los grupos, y operar prescindiendo en ese momento del resto de los vectores y de sus correspondientes relaciones, atendiendo únicamente en cada caso al valor que alcanza la expresión [12] según las distintas combinaciones posibles a asignar a los valores de los parámetros de cada grupo.

Es aquí precisamente, al considerar las posibles variantes de los valores de los parámetros de cada uno de los grupos aisladamente, cuando han de tenerse en cuanta las relaciones cualitativas entre las actividades o vectores de ese grupo en concreto, ya que tales relaciones pueden restringir el campo de posibilidades de combinaciones de valores a asignar a los parámetros