REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. VI, n. 22
octubre-diciembre 1977
pp. 61-76

LA PROGRAMACION LINEAL MULTICRITERIO

(PANORAMICA GENERAL FRENTE A LAS DECISIONES EMPRESARIALES)

Por Francisco José VALERO LOPEZ

Profesor de Economía de la Empresa de la Universidad Autónoma de Madrid

SUMARIO:

1.—Introducción. 2.—La programación Lineal multicriterio: concepto y elementos. 3.—Procedimientos de solución de la programación lineal multicriterio. 4.—Un ejemplo de aplicación.

1 INTRODUCCION

Nuestro trabajo parte de la hipótesis de que, en general, todo sujeto decisor, ya sea una persona, ya sea una organización, tiene frente a sí un «conjunto variado» de objetivos, con un mayor o menor grado de compatibilidad o de contradicción entre ellos, y de los que, en cada caso, no desea ignorar un subconjunto relevante de los mismos. Es decir, ante cada situación concreta en la que haya que emitir una decisión, el sujeto —o la organización— contemplará ciertas consecuencias de la misma, las cuales quedarán recogidas, al menos desde un punto de vista operativo, en una serie de funciones objetivo cuya optimización o satisfacción de modo conjunto no será, en general, posible de alcanzar.

La introducción de este esquema en el campo de la optimización matemática ha dado lugar a una rama de la misma que se denomina *programación multicriterio* o también *programación multiobjetivo,* de desarrollo reciente, si bien, su concepto más fundamental, es decir, el de la solución eficiente o no dominada, ya existía en la obra de Pareto (1896) aplicado a la economía del bienestar. La novedad de su desarrollo, junto con la fecundidad de los distintos enfoques que han presidido el mismo —sin que hasta la fecha se haya conseguido una solución definitiva integradora de todos ellos—, han limitado sus alcances a la programación lineal, donde sin embargo, son variados los algoritmos y las metodologías existentes.

Así pues, el objetivo, de nuestro estudio comprenderá la *programación lineal multicriterio* (en adelante PLMC), si bien algunas de nuestras consideraciones conservarán su validez ante formulaciones de mayor generalidad. La primera de ellas es la exclusión de dos clases de situaciones, ante las cuales la solución del problema que nos planteamos resulta trivial:

a) La perfecta compatibilidad entre los distintos objetivos analizados, en cuyo caso, el poder conseguir todos ellos, no necesitamos plantearnos ninguna elección entre los mismos.
b) La existencia de una escala de prioridades claramente establecida para el conjunto de dichos objetivos, ya que entonces, aunque éstos no sean compatibles bastará con la aplicación sucesiva de dicha escala, hasta llegar al objetivo menos deseado que sea factible conseguir.

Ambas situaciones son, sin embargo, poco frecuentes en la vida real. Por un lado, existe generalmente un conjunto de restricciones de diversa naturaleza que impiden la consecución simultánea de todos los objetivos considerados y, por consiguiente, éstos deben competir de cara a la asignación de los recursos limitados que dichas restricciones representan. Por otro, se ignora en muchos casos cuál es la importancia relativa de cada uno de los objetivos, información que a veces constituye parte de la solución a nuestro problema y, por lo tanto, inexistente, o mejor dicho, inutilizable, mientras éste no haya sido resuelto.

Otra de las características generales de toda situación multicriterio es el abandono de la idea de optimalidad y, en consecuencia, de la ordenación total que la misma induce para las distintas soluciones posibles. Salvo en el caso trivial de que todos los objetivos tengan un óptimo común, es decir, que nos encontremos ante una situación como la descrita en el apartado a) anterior, dicha idea carece totalmente de sentido, a menos que hayamos sido capaces de definir sin ambigüedades una relación entre los distintos objetivos capaz de transformar a éstos en uno solo (1).

---

(1) A su vez, la existencia de una escala de prioridades claramente establecida puede considerarse como un caso particular de relaciónentre los distintos objetivos, relación que tiene ahora una naturaleza lexicográfica.

El concepto que sustituye, entonces, al de optimalidad en un contexto multicriterio es el de *eficiencia* o *no dominación*. Hablaremos de *solución eficiente* (o no dominada) cuando no exista ninguna otra solución posible que la mejore en, al menos, uno de los objetivos, igualando los niveles de los demás. Bajo esta nueva perspectiva sólo se consigue una ordenación parcial del conjunto de soluciones factibles, puesto que mientras que toda solución eficiente será preferible a cualquiera que no lo sea, razón por la cual podremos centrar nuestra atención a sólo las primeras, las soluciones no dominadas son incomparables entre sí dentro del contexto del problema, debiendo recurrir entonces a nuevos criterios de elección, derivados la mayor parte de las veces de las preferencias del sujeto decisor, así como de cierta información que pueda extraerse del propio problema.

Una ordenación parcial es, por definición, incompleta, lo cual puede ser una fuente de complejidad para la toma de decisiones. Ahora bien, esta complejidad no puede en sí misma ser considerada como un resultado indeseable, ya que viene derivada de la esencia multiforme del problema, siendo consustancial a ella, de modo que no podemos suprimir la primera sin ahogar la segunda, con todas las consecuencias que puedan derivarse de tal hecho. Más aún, y dado que se hace necesario dotar al sujeto decisor de ciertos instrumentos o criterios que le ayuden en la elección entre las alternativas disponibles , dicha complejidad es fuente de nuevos métodos, nuevos algoritmos, con los cuales hacer frente a las situaciones multicriterio, típicas de la realidad económico-empresarial.

Siguiendo a B. Roy podemos clasificar las principales metodologías propuestas dentro del tema que comentamos como sigue (2):

1) Agregación de las distintas funciones objetivo en una sola que permita definir un orden total, con lo cual se destruye en cierta forma la esencia multicriterio del problema.
2) Exploración del conjunto de soluciones eficientes, extrayendo del mismo toda la información que pueda servirnos para poder discriminar aquella o aquellas soluciones más aconsejables, o que constituyan, en cierto sentido, el mejor compromiso entre los distintos objetivos implicados.
3) Definición de un orden parcial más fuerte que el derivado de las funciones objetivo primitivas, de modo que se reduzca en lo posible el número de soluciones finales a considerar.
4) Reducción de la incomparabilidad mediante técnicas tales como el estudio de signos, el rango de los parámetros, etc., las cuales requieren una menor información acerca de las funciones globales subyacentes en cada problema. Por funciones globales entendemos las representativas de la «utilidad» que para el sujeto decisor tiene cada una de las posibles soluciones multicriterio.

De esta relación las metodologías más utilizadas, con sus diversas variantes, son las dos primeras, mientras que las dos últimas representan unas vías de investigación insuficientemente exploradas por el momento. Además de los citados, también pueden emplearse métodos de prueba y error orientados a la comprobación de si un conjunto concreto de valores para las distintas funciones objetivo, propuesto por el sujeto decisor, es factible o no, con lo cual, sin ninguna estructura teorica subyacente, se logra tanto una total flexibilidad, como una mayor facilidad de manejo por parte de usuarios poco expertos en la materia, factores ambos que van perdiendo ventaja, tan pronto como el problema se hace lo suficientemente complejo y mayor

(2) Vid. ROY, B.: «Problems and Methods With Multiple Objetive Functions». Mathematical Programming, 1, 1971, págs. 239-266.

es la dificultad de comprobar tal factibilidad (3).

2. LA PROGRAMACION LINEAL MULTICRITRIO: CONCEPTO Y ELEMENTOS.

Un programa lineal multicriterio con n funciones objetivo adopta la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \text{Máx } f_1 &= c^1 x \\ \text{Máx } f_2 &= c^2 x \\ &\vdots \\ \text{Máx } f_n &= c^n x \end{aligned} \qquad (1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donde hemos adoptado la notación más usual en la representación matricial de un programa lineal.

Bajo las hipótesis enunciadas al comienzo, no existe ningún óptimo común a todas las n funciones objetivo consideradas, por lo que nuestro interés reside en caracterizar una solución eficiente, x*, dentro del conjunto de soluciones factibles. Para dicha solución, se cumplirá que no existirá ninguna otra posible x, tal que:

$$\begin{aligned} f_i(\overline{x}) &\geqslant f_i(x^*) && \forall_i = 1, - n \\ f_i(\overline{x}) &\neq f_i(x^*) && \text{para al menos un } i \end{aligned}$$

Para cada solución eficiente existirá un conjunto de valores λ_i, $1 = 1$, ———n que verifican:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0, \ \forall i \qquad (2)$$

y tales que dicha solución eficiente se obtiene resolviendo el siguiente programa lineal:

$$f_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c^i X$$

sujeto a las mismas restricciones originales.

En base a esta propiedad es obvia la manera de obtener una solución eficiente. El problema reside, entonces, en determinar el conjunto de pesos λ_i mediante los cuales pueda obtenerse una solución satisfactoria para el sujeto decisor.

Dentro del conjunto de soluciones eficientes habrá algunas que se deriven de un conjunto de pesos λ_i tales que habrá algún λ_j nulo, es decir, donde se ignora alguna de las funciones objetivo consideradas, lo cual puede estar en contradicción con los deseos del sujeto decisor, que, por hipótesis, quiere tener en cuenta todos los objetivos implicados en el problema. Por este motivo, las condiciones (2) anteriores suelen sustituirse por:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ \text{y} \ \lambda_i > 0, \ \forall i$$

con lo cual se obliga a ponderar de una manera efectiva todas y cada una de las funciones objetivo implicadas, tal vez con pesos muy peqeños algunas de ellas, pero nunca nulos. Las soluciones así obtenidas se denominan *propiamente eficientes*, subconjunto, por tanto, del compuesto por todas las soluciones eficientes.

De esta manera, se impide que se consigan ganancias en un cierto objetivo que

---

(3) Una comparación, desde el punto de vista experimental, de uno de tales métodos junto con otros con mayor fundamentación teórica puede varse en:

WALLENINS, J.: «Comparative Evaluation of Some Interactive Approachs to Multicriteriun Optimization». Management Science, Vol. 21, n.º 12, agosto 1975, págs. 1.387-1.398.

sean arbitrariamente grandes en relación con las pérdidas que pueda sufrir algún otro, lo cual podría suceder si este último careciera de ponderación alguna.

Una información de primera mano puede obtenerse del problema (1) sin más que resolverlo n veces, considerando en cada una de ellas una de las funciones objetivo como prioritaria, es decir, optimizando el problema con respecto a dicha función en exclusiva, a la vez que evaluamos todas las restantes. Con ello se consigue la siguiente matriz, que podemos denominar *matriz de óptimos individualizados:*

$$\begin{bmatrix} f_{11}\, f_{12} \;\ldots\ldots\; f_{1n} \\ f_{21}\, f_{22} \;\ldots\ldots\; f_{2n} \\ f_{n1}\, f_{n2} \;\ldots\ldots\; f_{nn} \end{bmatrix}$$

donde el significado de cada elemento f_{ij} es el del valor que toma la función objetivo i cuando el conjunto del problema se está optimizando con respecto a la función j. En definitiva,dicha matriz nos proporciona, de forma sintética y operativa, información acerca de las consecuencias que para los demás objetivos tiene el hecho de que consideremos prioritario cada uno de ellos.

La diagonal principal de la matriz anterior constituye lo que se ha denominado *«solución ideal»* por cuanto representa la combinación de los mejores valores que pueden conseguirse de cada una de las funciones objetivo, consideradas estas por separado, de acuerdo con el conjunto de restricciones conocido. Dada la hipótesis realizada acerca de la carencia de un óptimo común, dicha «solución ideal» corresponde a un punto infactible, siendo, por lo tanto inalcanzable.

Desde el punto de vista de la teoría de la programación lineal pueden plantearse tres tipos de situaciones durante el proceso de solución de un programa lineal multicriterio:

a) que el problema sea infactible, situación en la cual el problema carece de solución para todas y cada una de las funciones objetivo dadas. En efecto, la factibilidad o la ausencia de la misma sólo depende de que el conjunto formado por la intersección de todas las restricciones sea vacío o no, por lo que este caso se ha ignorado por todos los tratadistas del tema, realizando previamente el supuesto de que existe una solución factible.

b) que existan óptimos alternativos en alguna etapa del proceso de solución. Por ejemplo, en el caso de la matriz de óptimos individualizados pueden obtenerse varios puntos óptimos para alguna o algunas de las funciones objetivo individuales, óptimos que pueden diferenciarse respecto a los valores que adopten las restantes. En este caso, podemos decir que, más que una sola matriz, habrá un conjunto de ellas, todas con la misma diagonal principal, diferenciándose en algunos de los restantes elementos. Métodos, como el de Belenson y Kapur, basados en la información contenida en dicha matriz, parecen ignorar esta posibilidad (4).

c) que se obtenga para alguna de las funciones objetivo una solución ilimitada,en cuyo caso el valor de la misma podrá hacerse tan grande como se quiera. Ante esta situación

(4) Puesto que el criterio final de adopción de una determinada solución depende de las preferencias del sujeto decisor, la existencia de óptimos alternativos en alguna etapa del proceso proporciona un conjunto de caminos a seguir en búsqueda de una solución satisfactoria, de modo que si uno de ellos no resulta siempre podrá acudirse a los restantes.

puede sugerirse la eliminación de un objetivo tan poco operativo; sin embargo, esta sugerencia olvida que puede interesarnos de todas formas observar el comportamiento de dicho objetivo frente a la consideración prioritaria de los restantes. En todo caso, tampoco es esta una situación que haya sido contemplada por los tratadistas de la PLMC.

El procedimiento que, a nuestro juicio, parece ser el más recomendable es el de ignorar dicho objetivo en el contexto del problema, siempre que no se desee alcanzar un nivel mínimo del mismo cuya consecución no queda asegurada de modo general a la vista de la información que se dispone del problema. Si esto último sucede, debe modificarse su planteamiento, introduciendo dicho nivel mínimo en el conjunto de restricciones, a la vez que se s-prime la función objetivo causante de la situación que contemplamos.

No son estos los únicos problemas que pueden presentarse al resolver un programa lineal multicriterio. En efecto, generalmente los distintos objetivos considerados son de muy variada naturaleza, diversidad que se traduce muchas veces en que dichos objetivos se expresan en unidades de suyo incomparables. Además, la dirección real de algún objetivo puede ir hacia una minimización en lugar de la maximización con que hemos formulado nuestro problema. lo cual puede provocar una disparidad en el signo de los valores que adopta dicha función objetivo en relación con aquellas que correspondan realmente a una maximización. En ambos casos, parece necesario proceder a una normalización de los distintos objetivos.

En el caso de la matriz de óptimos individualizados, ésta puede someterse a un desplazamiento uniforme del valor de todos sus elementos, si procede corregir la segunda de las situaciones que acabamos de apuntar y, seguidamente, a una homogeneización de los valores correspondientes a cada uno de los objetivos.

Ambas transformaciones pueden realizarse con referencia a la propia matriz original. En efecto, sumando a cada uno de los elementos de la matriz un número k, tal que:

$$k = -\min_{ij} f_{ij}$$

si existe algún elemento negativo, pueden convertirse todos ellos en positivos o nulos caso de que sea conveniente hacerlo. En segundo lugar, una homogeneización de unidades de medida puede conseguirse con referencia a los valores máximos que puede adoptar cada una de las funciones objetivo. Es decir, si

$$f'_{ij} = f_{ij} + k, \ \forall i, j$$

donde k valdrá cero, si no se ha efectuado la transformación anterior entonces, para cada objetivo i se tiene

$$f''_{ij} = \frac{f'_{ij}}{\max\limits_{j} f'_{ij}}, \quad \forall j$$

con lo cual se obtiene una matriz normalizada de la forma que sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & f''_{12} & \cdots\cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & 1 & \cdots\cdots & f''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos de la diagonal principal son unos, debido a que, por construcción, para cada objetivo i se tiene:

$$\max_{j} f'_{ij} = f'_{ii}$$

Por último, diremos que todo procedimiento de resolución de un programa multicriterio que no se limite a proporcionar un conjunto más o menos amplio de soluciones eficientes, debe de ir dirigido en último término a la obtención de una solución que satisfaga a los deseos del sujeto decisor, si es que existe alguna. Por ello, junto a una primera etapa en tales procedimientos, cuya finalidad consiste en conseguir una solción que, respecto a algún criterio teórico constituya un buen compromiso entre los distintos objetivos, aparecerá normalmente otra etapa orientada a provocar una búsqueda, a partir de la solución precedente, de alguna otra más acorde con los deseos del sujeto decisor, caso de que este no acepte la primera, en base a determinada información que dicho sujeto debe suministrar.

3. PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION DE LA PROGRAMACION LINEAL MULTICRITERIO

Dentro del conjunto de métodos propuestos por B. Roy para atacar las situaciones multicriterio, y solamente para las dos primeros, hemos intentado obtener una clasificación lo suficientemente amplia e ilustrativa de los procedimientos existentes para la PLMC.

Dica clasificación podría quedar como sigue:

Veamos seguidamente una breve explicación de cada uno de los procedimientos así ordenados:

A.—Agregación de las distintas funciones objetivo.

1) Asignación directa de ponderaciones
2) Definición de niveles de referencia
   a) Programación por objetivos.
   b) Desviación mínima.
3) Ordenación lexicográfica.

b.— Exploración del conjunto de soluciones eficientes.

1) Generación total o de puntos extremos no dominados
2) Generación de un conjunto restringido.
3) Exploración inteligente
   a) Relaciones marginales de sustitución
   b) Distancia a la «solución ideal»
   c) Juego de suma nula.
4) Medición del contraste.

A.1) La asignación directa de ponderaciones nos permite obtener sin más una solución eficiente y, en su caso, propiamente eficiente, siempre que los pesos utilizados cumplan las propiedades comentadas, lo cual puede conseguirse a través de una simple normalización de los mismos. Zeleny nos previene contra dicha asignación directa, por cuanto (5):

a) la habilidad humana para realizar una evaluación global del problema que permita proporcionar unos pesos fiables no es muy grande, a la vez que se encuentra sometida a unos claros riesgos de arbitrariedad e inestabilidad.

b) la atribución de los citados pesos puede verse dificultada por la falta de comprensión total del problema por parte del sujeto decisor, que a menudo no tiene del todo claras sus ideas sobre el mismo.

c) el número total de objetivos a considerar puede ser muy grande, limitando aún más la habilidad humana de ponderar todos ellos.

d) aunque se haya estimado correctamente el conjunto de pesos a aplicar, el problema puede tener varias soluciones alternativas, sobre las cuales puede ser necesario realizar alguna discriminación que dichos pesos son incapaces de reflejar.

a) el conjunto de pesos puede alterarse tan pronto como varía el conjunto de posibles soluciones de que se dispone, dado que dichos pesos suelen obtenerse en base a un análisis del problema más que como unos meros datos de entrada al mismo.

A.2) Si definimos unos niveles de satisfacción o de aceptabilidad, m_i, i = 1, ··, n, para cada uno de los objetivos que consideramos, podemos, entonces, seguir dos caminos:

1) aplicar la programación por objetivos, minimizando la suma ponderada de las desviaciones, tanto positivas como negativas, que se produzcan con respecto a cada uno de los niveles fijados. Más todavía, en vez de definir unos determinados niveles de satisfacción o de aceptación para cada uno de los objetivos, podemos sustituirlos por unos ciertos intervalos, a los cuales intentamos acercarnos lo más posible, tanto por un extremo como por el otro. Este último da lugar a la denominada *«programación por objetivos - intervalos»*, objetivo de una reciente publicación de Charnes y Cooper (6).

2) minimizar la desviación que pueda producirse a cualquiera de los objetivos considerados, es decir, se intentará hacer:

$$\text{mín}\left\{|f_1 - m_1|, |f_2 - m_2|, ..., |f_n - m_n|\right\}$$

lo cual sólo tendrá sentido si —utilizando para ello los apropiados cambios de escala, en caso necesario— todas las citadas desviaciones tienen idéntica importancia (7).

A.3) La ordenación lexicográfica de las funciones objetivo consiste en aplicar una escala ordinal de prioridades a las mismas de modo que siempre se optimice con respecto a aquella función que presida dicha escala, utilizando sólo las de orden inferior para resolver los empates, es decir, los óptimos alternativos, que proceden de las funciones antecedentes.

B.1) La generación de todo el conjunto de soluciones eficientes tiene dos fases:

a) determinar los puntos extremos no dominados y,

b) a partir de dichos puntos, generar el resto de los elementos del conjunto.

Para un conocimiento profundo de ambas fases remitimos al lector a la obra de M. Zeleny y de P.L. Yu (8), dado que no

(5) ZELENY, M.: «Linear Multiobjetive Programming«. Lecture Notes in Economics and Mathema tical Systems, n.º 95, Springer-Verlang, 1974, páginas 169-171.

(6) CHARNES, A.; COOPER, W. W.: «Goal Programming and Multiple Objetive Optimizations. Part I». European Jornal of Operational Reseach, 1, enero 1977, págs. 39-54.

(7) La función objetivo anterior es fácilmente convertible a la forma standard de la programación lineal. Vid. B. ROY. Op. cit., pág. 242.

(8) Junto a la obra ya citada de M. ZELENY, y, como ampliación de la misma, puede verse:

YU, P. L., ZELENY, M.: «The Techniques of Linear Multiobjetive Programming». R.A.I.R.O., V-3, noviembre 1974, págs. 51-71.

es nuestra intención entrar de lleno en las interioridades de las mismas.

Desde el punto de vista práctico, dada la complejidad de los métodos empleados, así como la enorme cantidad de información que generan, gran parte de ella innecesaria, ya que, en definitiva, sólo se va a escoger una de todas las posibles soluciones eficientes, creemos que los procedimientos que entran en este apartado tienen un mero interés teórico, siendo preferible acudir a alguno de los métodos de exploración inteligente que seguidamente comentaremos.

B.2) Debido a la magnitud del conjunto de soluciones eficientes, en buena parte de los casos parece conveniente limitarnos a una porción restringida del mismo. Para ello, pueden rechazarse de entrada aquellas soluciones que no satisfagan ciertos niveles mínimos en todos o en algunos de los objetivos, o bien pueden considerarse solamente aquellas soluciones con un determinado grado de acercamiento, medido con algún criterio, a un marco de referencia fijado, como puede ser la propia «solución ideal» del problema.

Otro procedimiento a seguir puede ser la imposición de restricciones sobre los pesos, λ_i, a aplicar a cada uno de los objetivos (9). Con ello pueden introducirse las estimaciones que haya podido realizar el sujeto decisor acerca de la importancia relativa a cada uno de los objetivos para sus deseos.

8.3) Por exploración inteligente entendemos aquí una búsqueda dentro del conjunto de soluciones eficientes, sin necesidad de una previa determinación del mismo, utilizando dos fuentes de información:

A) una intrínseca al propio problema, como por ejemplo, la «solución ideal», la matriz de óptimos individualizados, etc.

b) la proporcionada por el sujeto decisor con la finalidad de hacer valer sus preferencias en la exploración.

Una de las propuestas con mayor interés teórico es la debida a Geoffrion (10). Su funcionamiento, que es también su debilidad, reside en el supuesto de que para cualquier punto factible, el sujeto decisor puede proporcionar una estimación de las n—1 relaciones marginales de sustitución entre los n objetivos. A partir de estas relaciones puede construirse una dirección de movimiento en búsqueda de una mayor utilidad para el sujeto decisor. Una segunda información que debe proporcionarse es la longitud de dicho movimiento (es decir, el tamaño de cada paso). La dificultad radica, entonces, en que el sujeto decisor no suele estar en condiciones de proporcionar la información que se requiere, además de que la lógica y los conceptos empleados no son los más apropiados para personas que no suelen tener en mente las ideas básicas de la optimización matemática en general.

En segundo lugar, se encuentran todos aquellos métodos basados en el máximo acercamiento a la «solución ideal», según uno u otro criterio de distancia. Más aún, al imponer como restricción un determinado grado de acercamiento a dicha solución, puede muy bien modificarse la región factible, y, a consecuencia de ello, también la «solución ideal», desplazándola, entonces, hacia el nuevo conjunto de soluciones posibles. En todos estos métodos, las distancias correspondientes a cada objetivo pueden estar ponderadas, reflejando así la distinta importancia de cada uno de ellos.

Uno de los algorítmos más conocidos en esta dirección es el método STEM, basado en una concepción mínima de la distancia

---

(9) Este es el camino seguido en: STEVER, EE.: «Multiple Objetive Linear Programming With Interval Criterion Weights». Manegement Science, Vol. 23, n.º 3, noviembre 1976, págs. 305-316.

(10) GEOFFRION, A. M.: «Vector Maximal Decomposition Programming Working Paper, Universidad de California, Los Angeles, septiembre 1970.

Sobre las dificultades que presenta la aplicación práctica de este método, puede verse la obra citada en la nota 3.

a la «solución ideal». Es decir, si para cada solución eficiente, x^j, se tiene una medida de distancia respecto a cada uno de los objetivos, $d_i(x^j)$, $i = 1, \cdots n$ (11), se intentará descubrir aquella que verifique:

$$\min_j \max_i d_i(x^j)$$

si esta solución no es satisfactoria para el sujeto decisor, este debe indicar cual de los objetivos considerados puede empeorarse, y hasta qué medida considera aceptable hacerlo, repitiéndose de nuevo el proceso previa modificación de las ponderaciones utilizadas en el cálculo de las distancias.

Por último, el método propuesto por Belenson y Kapur (12) considera la matriz de óptimos individualizados como la correspondiente a un juego bipersonal de suma nula, siendo los «jugadores» las distintas funciones objetivo, por un lado, y los puntos óptimos que corresponden a cada una de ellas, por otro. La resolución de dicho juego nos permite obtener unos pesos que, debidamente normalizados para tener en cuenta la heterogeneidad de los distintos objetivos, nos sirven para determinar una solución de compromiso. Al igual que antes, esta solución puede no ser del agrado del sujeto decisor, en cuyo caso se sustituye el punto óptimo correspondiente al objetivo menos deseado por dicha solución de compromiso, repitiéndose el proceso a partir de la nueva matriz de pagos.

B.4) Es evidente que, junto a la ponderación «a priori» de un determinado criterio u objetivo, también puede hablarse de una importancia «a posteriori» del mismo, basada en el poder discriminatorio que posea. En efecto, un objetivo considerado inicialmente como fundamental puede tener poca variación en sus valores, dentro del contexto del problema, mientras que un objetivo conceptuado como secundario puede presentar un amplio campo de variación, llegando incluso a situaciones poco deseables para el sujeto decisor.

Para tener en cuenta esto último puede acudirse al concepto de entropía, que, de alguna manera, mide el poder discriminador de un conjunto de señales informativas en este caso, referidas, por ejemplo, a los valores que toman las distintas funciones objetivo a través de un recorrido por algún conjunto de solciones —eficientes o no—. Es decir, podemos construir una tabla como la que sigue (13).

SOLUCION / OBJETIVO	x^1	x^2	...	x^m
1	v_{11}	v_{12}	...	v_{1m}
2	v_{21}	v_{22}	...	v_{2m}
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
n	v_n	v_{n2}	...	v_{nm}

(11) Vid. ZELENY, M.: Op. cit., págs. 171-176, donde pueden verse varios conceptos de distancia a la «solución ideal».

El método STEM se encuentra descrito con mayor detalle en:

BENAYOUN, R.: et al: «Linear Programming With Multiple Objective Functions: STEP-Method (STEM)». Mathematical Programming, vol. 1, n.º 3, diciembre 1971, págs. 366-375.

(12) BELENSON, S. M.; KAPUR, K. C.: «An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems With Examples». Operational Research Quaryerly, vol. 24, n.º 1, págs. 65-77.

Para una aplicación práctica de este algoritmo puede verse el ejemplo que acompaña a este trabajo.

(13) Vid. ZELENY, M.: Op. cit., págs. 176-180, para una aplicación de esta metodología, aunque referida a las distnacias a la solución ideal más que a los valores que toman los distintos objetivos, como nosotros proponemos.

La dificultad de este método reside en la necesidad de determinar previamente las soluciones —eficientes o no— que se van a utilizar para medir el contraste de los objetivos, cuyo resultado puede depender en grado sumo del conjunto particular que se considere.

siendo v_{ij}, i = 1, — n, j – m, el valor que adopta la función objetivo i en la solución j.

Para cada uno de los objetivos i podemos definir unas «probabilidades» P_{ij}, j = = 1, --- m, como sigue:

$$p_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} v_{ij}}, \quad i = 1, ..., n$$

a las cuales se les puede aplicar el concepto de antropía como medida del contraste que representan dichas «probabilidades». Por lo tanto,

$$H_i = - \sum_{j=1}^{m} p_{ij} L_n p_{ij}$$

dicha entropía es máxima cuando el contraste es nulo, es decir, cuando

$$p_{ij} = \frac{1}{m}, \quad \forall j$$

y

$$H_i = L_n m$$

En base a esto, podemos asignar a cada uno de los objetivos pesos que sean inversamente proporcionales a la entropía que hemos calculado para cada uno de ellos, teniendo en cuenta, si procede, ponderaciones que recojan la distinta importancia de los objetivos para el sujeto decisor.

Con el fin de entender mejor todo lo expuesto hasta ahora que dedicaremos el epígrafe siguiente a exponer un supuesto que sirva como fuente aclaratoria de lo pretendido en el trabajo.

4. UN EJEMPLO DE APLICACION (14)

A) *Enunciado*

Una empresa fabricante y comercializadora de dos productos desea obtener el mejor beneficio de los mismos, a la vez que conseguir la mayor penetración comercial en el mercado.

El beneficio neto que puede conseguirse de la venta de cada uno de los productos es de 10 para el primero y de 5 para el segundo. La eficacia comercial —en lo que respecta a la penetración de la empresa en el mercado— es el doble para el segundo producto en comparación con el primero.

La dirección de la empresa no ha hecho explícitas sus preferencias en cuanto a lo que considera una combinación satisfactoria de ambos objetivos, y sólo desea alguna información acerca de cuál puede ser el mejor compromiso entre ellos.

Por otro lado, se sabe que:

a) La capacidad de producción nos impide obtener más de 6.000 unidades totales, contando ambos productos.
b) La situación actual del mercado no permite vender más de 4.000 unidades del segundo producto.
c) Las horas de trabajo disponibles para la fabricación de ambos productos ascienden a 10.000, requiriéndose dos horas para el segundo y hora y cuarto para el primero.

---

(14) Una aplicación al análisis de inversiones puede verse en:

CAPLIN, D.; KORNBLUTH, J. S. H.: «Multiobjective Investment Planning Under Uncertainty». Omega, vol. 3, n.º 4, 1975, págs. 423-441.

El ejemplo que ahora proponemos ha sido empleado como material de trabajo para la asignatura «Análisis y Administración de Sistemas Empresariales», en la Facultad de C.C.E.E. y E.E. (U.A.M.), bajo la dirección del Profesor Eduardo Bueno Campos, Catedrático de Economía de la Empresa.

B) *Solución*

A la vista del enunciado, el planteamiento del programa multicriterio implicado quedaría como sigue:

$$\text{máx } f_1 = 10x_1 + 5x_2$$
$$\text{máx } f_2 = x_1 + 2x_2$$

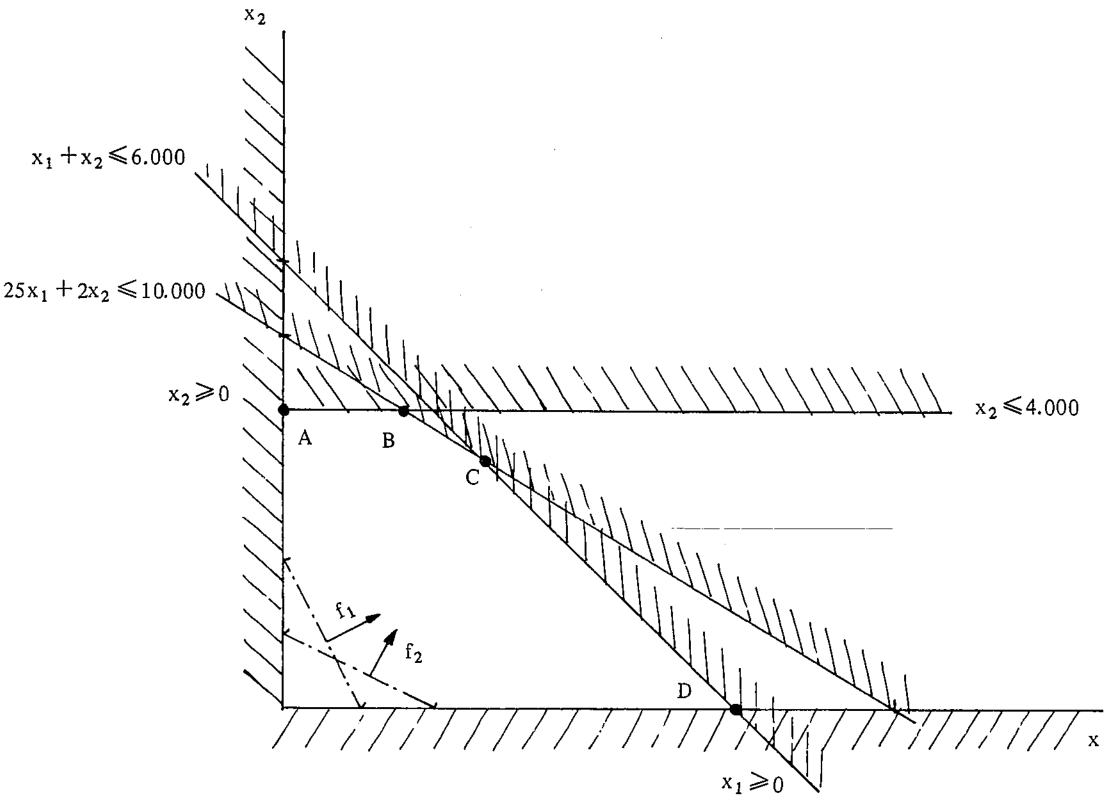
sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leqslant 6.000$$
$$x_2 \leqslant 4.000$$
$$1{,}25\, x_1 + 2x_2 \leqslant 10.000$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Entonces, siguiendo el algoritmo propuesto por Belenson y Kapur, procedemos de la siguiente manera:

a) Resolveremos un programa lineal para cada una de las funciones objetivo consideradas, a la vez que evaluamos las restantes.

Debido a la dimensión de nuestro problema, acudimos al procedimiento gráfico, obteniendo estos resultados:



Es decir, además del origen, tenemos los siguientes vértices en la región factible:

A = (0,4000)
B = (1.600, 4.000)
C = (2.666'6, 3.333'$\hat{3}$)
D = (6.000, 0)

El óptimo del primer objetivo se encuentra en el punto D, donde:

$$f_1^* = 60.000$$
y
$$f_2 = 6.000$$

En cuanto al segndo objetivo, su óptimo se alcanza en el vértice B siendo

$$f_2^* = 9.600$$
y
$$f_1 = 36.000$$

b) Con los resultados anteriores formamos una matriz de pagos de un juego de suma nula, siendo los «jugadores» las distintas funciones objetivo, por un lado, y los puntos óptimos que corresponden a cada una de ellas, por otro. Es decir:

	f_1^*	f_2^*	máx. fila
f_1	60.000	36.000	60.000
f_2	6.000	9.600	9.600

c) Cada una de las filas tiene, al menos, un valor estrictamente positivo, por lo que la única normalización que procede es la de homogeneizar las distintas unidades de medida de cada uno de los objetivos, para la cual dividimos cada elemento de una fila por el valor máximo de la misma.

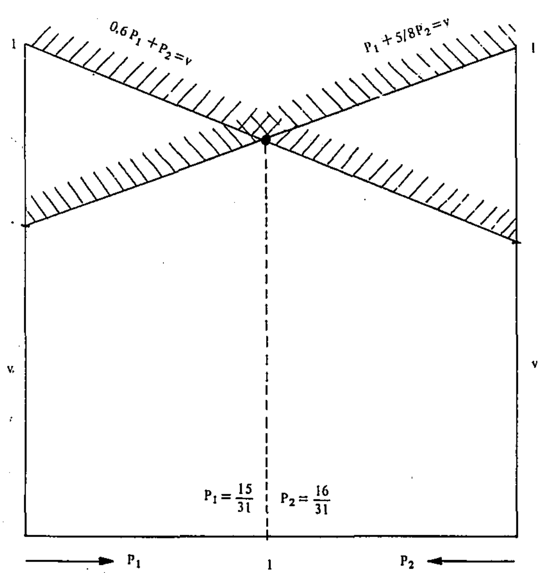
Efectuando esto nos queda:

	f_1^*	f_2^*
f_1	1	0,6
f_2	5/8	1

d) El juego anterior se resuelve mediante el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\text{máx } v \\
&P_1 + 5/8\, P_2 - v \geqslant 0 \\
&0{,}6P_1 + P_2 - v \geqslant 0 \\
&P_1 + P_2 = 1 \\
&P_1, P_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

La solución gráfica del mismo es:



e) Las anteriores probabilidades podrían ser los pesos atribuibles a cada función objetivo si no hubiéramos normalizado las entradas de la matriz de pagos. Con objeto de hacer referir dichos pesos a las funciones objetivo originales, debemos dividir dichas probabilidades por los máximos correspondientes. Es decir,

$$\lambda_1 = \frac{15/31}{60.000}$$

$$\lambda_2 = \frac{16/31}{9.600}$$

f) Estos últimos pesos, para ser definitivos deben sumar 1, por ello hacemos:

$$\lambda'_1 = \frac{\dfrac{15/31}{60.000}}{\dfrac{15/31}{60.000} + \dfrac{16/31}{9.600}} = 0,13$$

$$\lambda'_2 = \frac{\dfrac{16/31}{9.600}}{\dfrac{15/31}{60.000} + \dfrac{16/31}{9.600}} = 0,87$$

g) Con estos pesos formamos la función objetivo compuesta:

$$f = \lambda'_1 f_1 + \lambda'_2 f_2 = 0,13(10x_1 + 5x_2) + + 0,87(x_1 + 2x_2) = 2,17x_1 + 2,39x_2$$

cuyo óptimo se encuentra en el punto C, siendo:

$$f^* = 13.753,3$$
$$f_1 = 43.333,3$$
$$f_2 = 9.333,3$$

Otra vía de solución podría seguirse mediante la programación por objetivos, tomando como punto de referencia la solución ideal» recogida en la matriz de óptimos individualizados de nuestro problema.

Es decir, trataremos de hacer

$$\text{mín } W_1^- Y_1^- + W_2^- Y_2^-$$

sujeto a:

$$10x_1 + 5x_2 + y_1^- = 60.000$$
$$x_1 + 2x_2 + y_2^- = 9.600$$

además de las restricciones originales y las condiciones de no negatividad de

y_1^- e y_2^- (15).

W_1^- y W_2^- deberían escogerse de acuerdo con la importancia y magnitud de cada uno de los objetivos. Puesto que de la primera no disponemos de información alguna, podemos hacer

$$W_1^- = \frac{1}{60.000}$$

$$W_2^- = \frac{1}{9.600}$$

con objeto de tener en cuenta la diferencia dimensionalidad de cada objetivo. Si multiplicamos ambos pesos por cualquier número positivo, la solución del problema segui-

(15) Obsérvese que éste podría ser un método, simple y sencillo por lo demás, de exploración inteligente del conjunto desoluciones eficientes, buscando aquella que sea más cercana a la «solución ideal», siendo la distancia una suma ponderada de las desviaciones a la misma.

Por definición de la «solución ideal», tales desviaciones lo serán siempre por debajo, de ahí que no aparezcan en nuestra formulación las variables superávit típicas de la programación por objetivos. Debido a este hecho, siempre podremos despejar las variables déficit de sus igualdades respectivas y sustiruirlas en la función objetivo, desapareciendo, entonces, toda notación específica de la programación por objetivos.

rá siendo la misma, por lo que, para mayor comodidad, hacemos

$$W_1^- = \frac{60.000}{60.000} = 1$$

$$W_2^- = \frac{60.000}{9.600} = 6{,}25$$

Utilizando estos pesos la solución que se obtiene se encuentra también en el punto C, donde:

$$y_1^- = 16.666{,}6$$

$$y_2^- = 266{,}6$$