

MODELOS DE PROGRAMACION MATEMATICA DE
LA EMPRESA

por

Enrique CASTELLO MUÑOZ
Doctor en Ciencias Económicas
Profesor Adjunto de la Universidad Complutense de Madrid

SUMARIO

1. Consideraciones sobre los modelos clásicos y modernos de programación.—2. El enfoque de la Investigación Operativa y la Programación Matemática.—3. El modelo de la Programación Lineal.—3.1. Planteamiento del problema.—3.2. Métodos de resolución.—3.3. Aplicaciones económicas.—3.4. Posibilidades y limitaciones.—4. Otros modelos de Programación Matemática.

1. CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS CLASICOS Y MODERNOS DE PROGRAMACION

Lo que en Economía se designa con el nombre de "Teoría Económica de la Empresa" es un grupo de teorías relativas al comportamiento de empresas que operan bajo un sistema muy especial de condiciones ambientales, conocidas, en su conjunto, como "Economía de Mercado" (1).

El análisis marginal está relacionado con la programación lineal, pues ambos modelos se refieren a la optimización matemática y a la adopción racional de decisiones por la unidad económica llamada empresa.

El núcleo de la economía de gestión ha consistido históricamente en la aplicación del análisis marginal a fin de obtener soluciones óptimas en determinados problemas directivos. El análisis marginal y la teoría de la empresa que lleva aparejada, tiene profundas raíces en el cálculo matemático (el instrumento analítico clásico de optimalidad es el cálculo diferencial). Los conceptos básicos, sin embargo, pueden ser explicados fácilmente en términos no matemáticos (2).

La moderna teoría de la empresa, según Chamberlin, Hicks, Robinson, Samuelson, Viner y otros, tiene su primer antecedente en el análisis que hizo David Ricardo de los problemas de la Agricultura inglesa hace siglo y medio (3).

La mayor parte de las versiones contemporáneas de la teoría económica de la empresa se deben a Agustín Cournot que en 1838 hizo la primera aplicación del cálculo diferencial a la teoría de la empresa (a los efectos de obtener un sistema de condiciones necesarias y suficientes para la maximización de beneficios de la empresa, dando como resultado la conocida regla de igualar el ingreso marginal con el coste marginal), pero esto no dio fruto hasta 1870, cuando Jevons, Menger y sus seguidores introdujeron los métodos formales del análisis marginal.

En Economía, mientras se ha servido del análisis marginal, no ha creado una ciencia de la empresa. Una de las razones está en la clase de matemáticas empleada, la otra en el fin propuesto al estudiar la unidad económica de producción. Sin embargo, los progresos hechos hasta ahora utilizando este método sirve muchas veces de punto de partida (4).

El concepto principal subyacente en todo análisis marginal es que se puede alcanzar una posición óptima intercambiando marginalmente una pequeña cantidad adicional por otra. Así pues, los términos clave, son los intercambios y la igualación marginal. Y el objetivo, es el de obtener un óptimo, bien en forma de un máximo en los beneficios o de un mínimo en los costes.

Es decir, que según la teoría económica, el equilibrio de la empresa en el mercado de sus factores de producción se consigue cuando se alcanza la nivelación de las productividades marginales ponderadas de los mismos y en el mercado de sus productos, cuando se igualan costes e ingresos marginales (5).

El problema de la producción en la empresa, según el análisis marginal está supeditado a la posibilidad de diferenciar las funciones de producción, de ingresos y de costes con respecto a cada uno de los factores y productos independientemente, procedimiento matemático que tiene valor operativo solamente cuando las correspondientes variaciones de valores son posibles en la realidad. Tales casos existen en economía, caracterizándose por situaciones de producción en que el campo de las elecciones técnicas comprende variaciones infinitesimales en los factores y en los productos individuales; como sucede en los procesos agrícolas.

Las condiciones de continuidad y derivabilidad de la función de producción, en las que descansa el análisis marginal, dan lugar al cálculo de un máximo condicionado. De modo, que

(4) Alcocer Chillón: "Economía de la Empresa", Introducción a la Teoría de la Programación Lineal. Ejes, Madrid, 1957, pág. 2.

(5) Fernández Pirla, J.M.: "Economía y Gestión de la Empresa", ICE, Madrid, 1970, pág. 14. —Walras y Pareto definen la interdependencia general de los mercados de factores y de productos. A la noción de interdependencia se añade el concepto de equilibrio, de carácter estable.

(1) Naylor y Vernon: "Economía de la Empresa", Amorrortu, Buenos Aires, 1973, pág. 13.

(2) Farrar y Meyer: "Economía de Gestión", Prentice Hall, 1972, pág. 9.

(3) Dorfman, R.: "Programación Lineal", Aguilar, Madrid, 1962, pág. 3.

el método del multiplicador de Lagrange ha demostrado su utilidad para la solución de problemas que pueden formularse de esta manera.

Una vez rotos los estrechos límites impuestos por el análisis marginal neoclásico, se ha podido pasar a una revisión de los modelos tradicionales, los cuales no se eliminan sino que más bien pasan a constituir un caso especial de la moderna teoría de la empresa ⁽⁶⁾.

El tipo de decisión con el que se enfrenta una empresa que emplea procesos industriales es esencialmente distinto del que se examina en el análisis marginal. Para el análisis de los programas industriales fue ideado el método de la programación lineal.

La programación lineal o, mejor, "el análisis de actividades" (*activity analysis*) ⁽⁷⁾, ya que este método se ha generalizado para funciones de mayor complicación matemática, ha sido creada para resolver problemas económicos. En particular, ha podido sentar los cimientos de una verdadera ciencia de la empresa.

La programación lineal representa una confluencia de diversas corrientes de desarrollo: estudios matemáticos de la geometría superior del espacio, que arrancan probablemente de Laplace y, con toda seguridad, de Weyl; un sencillo modelo de economía dinámica debido a von Neumann; la descripción matricial de Leontief de las interrelaciones de la industria estadounidense, y la investigación de Wood y Dantzig sobre los problemas de gestión de las Fuerzas Aéreas. La teoría de los juegos ayudó ciertamente a abrir camino a la programación lineal, la cual, matemáticamente, aunque no conceptualmente, es un problema estrechamente relacionado con ella. De aquí, que apareciese esta técnica en el "campo de la gestión científica más que en el de la economía" siendo Koopmans quien encauzó los estudios sobre la aplicación de la programación lineal a los problemas del bienestar económico ⁽⁸⁾.

Como dice el profesor López Moreno: "Si en 1935 no hubiera escrito Weyl su trabajo sobre

la topología de los poliedros convexos no se habría desarrollado la programación lineal" ⁽⁹⁾.

Como importantes aportaciones al desarrollo de la programación destacan las de los economistas Koopmans, Dorfman y Cooper. Ha habido aportaciones notables debidas a matemáticos tales como el ruso Kantorovich, Kuhn, Tucker, Charnes y otros. Pero, sin duda, la más importante ha sido la de George Dantzig, inventor del método Simplex.

La hipótesis de competencia perfecta (como dice Boulding olvida el papel de la información) por parte del marginalismo ha sido una atrevida simplificación de la realidad, pues en ésta sólo existen estructuras monopolíticas o cuasi monopolíticas. Los precios ya no son un dato para el empresario, éste puede influir sobre ellos convenientemente. Todo ello ha hecho más necesario que nunca la existencia de una disciplina científica (la economía de empresa), que permitiera resolver los problemas económicos que se planteaban en el ámbito empresarial. El objeto formal de dicha disciplina es formular leyes de equilibrio en la empresa, pero no en sentido general y abstracto, ya que el equilibrio así considerado es estudiado por la teoría económica, sino en tanto es susceptible tal equilibrio de aplicaciones concretas en el orden microeconómico de la empresa ⁽¹⁰⁾. En Programación Lineal se obtiene el equilibrio desde los factores que condicionan la producción y los precios factoriales de equilibrio interno de optimización.

Según Dorfman, en sentido matemático, la programación lineal estudia la maximización o minimización de una función sujeta a desigualdades lineales. Difiere, por tanto, del tipo de optimización tratado en el cálculo diferencial en tres aspectos: 1.º en que se ocupa de la optimización en sentido amplio, más que en sentido reducido; 2.º en que considera desigualdades restrictivas, en vez de igualdades, y 3.º

(9) López Moreno, M.J.: "La llamada Investigación Operativa y la Ciencia Económica". Primera reunión científica de ITECA, León, 1959, pág. 3.

(10) Boulding, K.E.: "Etat actuel de la Théorie de l'Entreprise", en Boulding y Spivey: "La Programmation Lineaire et la Théorie de l'Entreprise", París, Dunod, 1964.—Suárez, A.S.: "Nuevas tendencias de la empresa en una economía de Mercado", ESIC-Market, núm. 11, junio-septiembre 1973, pág. 215.—Fernández Pirla: ob. cit. Cap. 11.

(6) García Echevarría, S.: "Planificación y Pronóstico en la Economía de la Empresa", ICE, Madrid, pág. 10.

(7) Koopmans: "Activity Analysis of Production and Allocation", Nueva York, 1951.

(8) Dorfman, R.: ob. cit., pág. 16.

en que las restricciones son lineales y no de otra forma más general ⁽¹¹⁾.

El análisis marginal sólo explica la naturaleza lógica de la posición óptima de la producción en una empresa industrial; pero no puede proporcionar ningún método directo para decidir o seleccionar un programa óptimo de producción. Alfred Marshall, fundador del principio de sustitución, dijo que sobre el problema de la producción, los empresarios no trabajan con los cálculos formales, sino con instintos experimentados. Sin embargo, actualmente, ya se dispone de un método científico (la programación matemática) para calcular numéricamente la solución óptima de los problemas de producción, con respecto a la distribución de los recursos limitados ⁽¹²⁾.

Por lo tanto, son dos enfoques técnicos de la realidad productiva que es necesario interpretar. Cada uno de ellos parte de supuestos distintos para llegar a conclusiones diferentes.

2. EL ENFOQUE DE LA INVESTIGACION OPERATIVA Y LA PROGRAMACION MATEMATICA

Para captar la realidad microeconómica de la empresa, la metodología práctica de la ciencia económica, consistente en el análisis marginal, resulta insuficiente, de ahí la necesidad de una metodología más apropiada, tal es el llamado Método Operativo (o Investigación Operativa).

La disciplina de la economía de la empresa se caracteriza a partir de 1950 por la utilización de métodos de carácter cuantitativo. Después de la segunda guerra mundial y a través de tres cauces básicos: los modelos económicos, las operaciones militares y las matemáticas, se desarrolló la llamada Investigación Operativa (Operations Research —americana— u Operational Research —inglesa— ⁽¹³⁾.

(11) En la obra de Naylor y Vernon puede verse una comparación de los modelos generales de análisis marginal y programación lineal, págs. 243 y ss.

(12) Yu, L.: "Programación Económica en la gestión industrial", BEE, núm. 68, mayo-agosto 1966, págs. 367 y 368.—Soldevilla, E.: "Análisis de la Programación Lineal en el Análisis de las Funciones de Producción", BEE, núm 71.

(13) Bueno Campos, E.J.: "Del método operativo en el comportamiento económico de la empresa y un ensayo sobre los orígenes de la Investigación Opera-

Para la economía de la empresa ha sido, sin duda, tan relevante el desarrollo de los métodos operativos, que es a partir de su aplicación en la teoría y en la práctica cuando la investigación y la fundamentación científica de las decisiones abren nuevas y amplias perspectivas.

La importancia del método que pudiéramos denominar operativo es tan grande en la economía de la empresa, que como algunos economistas han afirmado esta disciplina no se manifiesta autónomamente como ciencia hasta que no ha surgido un método apto para la resolución de su amplia problemática ⁽¹⁴⁾.

El método operativo aporta a la economía de la empresa un vehículo singular que hace posible una reformulación de su contenido. Asimismo, coadyuva a una parte muy considerable de los sistemas de estructuras funcionales, que las definen como entidad económica independiente. Sucede así por cuanto se permite un importante avance en pro de un método que hace viable la unificación del fragmentado análisis microeconómico, para satisfacer una finalidad de la mayor importancia: la toma de decisiones ⁽¹⁵⁾.

Se han dado muchas y muy dispares definiciones de Investigación Operativa. Una de las definiciones más acertadas es la que considera a la Investigación Operativa como "la ciencia que se ocupa de la preparación científica de las decisiones". Ofrece a la Economía de la Empresa un instrumento para la determinación de decisiones óptimas (la optimización es la revolución de la Investigación Operativa). La Investigación Operativa viene a ser una especie de réplica al análisis marginal, y constituye, una manifestación del pragmatismo anglosajón ⁽¹⁶⁾.

Las tres características esenciales de la Inves-

tiva", Anales de Economía, núm. 10, abril-junio 1971.—García Echevarría, S.: "Economía de la Empresa y Política Económica de la Empresa", Esic, Madrid, 1974, págs. 272 y ss.

(14) Fernández Pirla, J.M.: ob. cit., pág. 18, "Sobre el concepto y contenido de la Economía de la Empresa", Técnica Económica, núm. 1, Madrid, 1959.

(15) López Moreno, M.J.: "Gestión de la Empresa y Programación Lineal: momento crítico de un método científico", segundas reuniones científicas de ITECA, Tarragona, octubre 1964, pág. 9.

(16) Suárez, A.S.: "Investigación Operativa y Economía de la Empresa", BEE, núm. 84, diciembre 1971, pág. 947.

tigación Operativa son: 1.º orientación de sistemas; 2.º utilización de equipos mixtos y 3.º adaptación del método científico⁽¹⁷⁾.

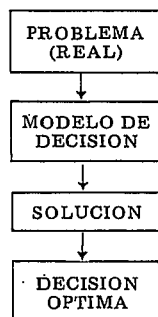
El método más frecuente seguido por los equipos de Investigación Operativa, es el siguiente: 1.º formulación del problema; 2.º construcción del modelo; 3.º obtención de la solución; 4.º comprobación del modelo y de la solución; 5.º establecimiento de controles sobre la solución y 6.º puesta en práctica de las soluciones⁽¹⁸⁾.

El modelo es el centro de la Investigación Operativa, como lo es en toda ciencia⁽¹⁹⁾. La posibilidad de elaborar modelos en la gestión empresarial, ha constituido la aportación más importante para la madurez de la economía de la empresa.

Los modelos económicos y, en general todo modelo, es una abstracción más o menos acentuada de una realidad. El grado máximo de abstracción se consigue cuando se utiliza un lenguaje simbólico, caso de las matemáticas. El modelo matemático representa la estructura del sistema real en términos cuantitativos (el concepto de estructura es ingrediente esencial de los modelos)⁽²⁰⁾.

En general, en todo problema de Investigación Operativa es necesario construir en primer lugar el modelo matemático que ha de servir de base para su estudio; esto requiere un conoci-

miento profundo del caso y una gran experiencia. Se trata del siguiente planteamiento:



Consiste en recoger el problema real y reproducirlo en un modelo de decisión, modelo que se trata de resolver en base de un algoritmo. La solución constituye una información sobre la decisión óptima.

Según Ackoff y Rivett, todos los modelos de la Investigación Operativa pueden sintetizarse en una ecuación, en la cual, la medida de una característica P es función de un grupo de aspectos controlables del sistema C_i y de un grupo de aspectos incontrolables V_j . Así pues, la fórmula básica de cualquier modelo de Investigación Operativa es: $P = f(C_i, V_j)$ ⁽²¹⁾.

La medida del rendimiento de un sistema es la que se trata de optimizar (maximizar o minimizar). Las variables controladas son las que puede manipular quien toma las decisiones, por ejemplo, la cantidad de dinero invertido en varias actividades de la empresa, el tamaño y la ubicación de las fábricas, etc. Las variables no controladas son las que no se sujetan al control de quien toma decisiones; pero que, sin embargo, afectan al rendimiento del sistema; por ejemplo, el clima, la coyuntura económica, etc.

Cohen y Cyert, clasifican los modelos económicos de la empresa utilizando tres dimensiones: 1.º grado de racionalidad (objetivamente racional, subjetivamente racional y no racional); 2.º dimensión temporal (estáticos o dinámicos), y 3.º estado de información (certidumbre, riesgo e incertidumbre)⁽²²⁾.

(21) Ackoff, R. y Rivett, P.: ob. cit., pág. 41.

(22) Cohen, K.J. y Cyert, R.M.: "Theory of the firm: Resource allocation in a Market Economy", Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1965, pág. 308.

(17) Ackoff, R. y Rivett, P.: "La Investigación Operativa en la Empresa", Sagitario, Barcelona, 1966, pág. 21.

(18) Churchman, Ackoff y Arnoff: "Introducción a la Investigación Operativa", Aguilar, Madrid, 1971, pág. 13.

(19) Rivett, P.: "La Investigación Operacional", Labor, Barcelona, 1971, pág. 23.

(20) Riggs, J.L.: "Modelos de Decisión Económica", Alianza Universidad, Madrid, 1973.—Churchman, Ackoff y Arnoff, ob.cit.—García Echevarría, S.: ob. cit.—Sampedro, J.L.: "Realidad Económica y Análisis Estructural", Aguilar, Madrid.—White, D.G.: "Teoría de la Decisión", Alianza Universidad, Madrid, 1972.—Blondé, D.: "La Gestión Programada", Sagitario, Barcelona, 1975.—Lesourne, J.: "Los estudios Económicos en la Empresa", Sagitario, Barcelona. "Modelos de Desarrollo de las Empresas", Dunod, París, 1973.—Ackoff, R.L.: "Un concepto de Planeación de Empresas", Limusa Wiley, México, 1972.—Beach: "Modelos Económicos", Aguilar, Madrid, 1961.

La Investigación Operativa (que expresa un conjunto de conocimientos derivados del campo de la ciencia matemática y de la estadística), comporta un conjunto de modelos de distinta naturaleza matemática (también llamada métodos de optimización), que caen dentro de las llamadas "técnicas cuantitativas al servicio de la empresa". Como técnicas propiamente de Investigación Operativa (cada una de ellas puede aplicarse a la optimización de uno o varios subsistemas integrantes del sistema empresa), tenemos las siguientes: Programación Lineal, Programación Entera, Programación no Lineal, Método de Transporte, Renovación de Equipos, Teoría de los Inventarios, Método PERT, Teoría de los Juegos, Teoría de las colas o líneas de espera, Programación Dinámica y Proceso de Markov, Teoría de la Información, Teoría de Grafos, Teoría de la Decisión, Simulación Matemática, Juegos de Empresas, etc.

La Investigación Operativa y la Teoría de la Programación se desarrollaron en ligazón con las necesidades de las operaciones de guerra y se hallan estrechamente vinculadas entre sí.

La Investigación Operativa encuentra su razón de ser en la asignación óptima de recursos escasos y la programación constituye la teoría matemática de la aplicación del principio de explotación económica racional.

Cuando se habla de programar, hay que poner previamente en claro estas tres cuestiones: 1.º cuáles son los objetivos de la programación (es decir, qué se pretende conseguir programando); 2.º cuáles son los datos o supuestos previos de que se parte y 3.º cuál es el modelo matemático que reflejará mejor la realidad (23).

El saber plantear el problema de la programación e interpretar económicamente los resultados, es de vital importancia para el economista (la formulación matemática ha de servirle únicamente como medio de exposición o de investigación).

Todos los modelos de "Programación Matemática" (puede considerarse como el núcleo central de la Investigación Operativa), son instrumentos de gran utilidad en la economía de la empresa, en especial los de Programación Lineal

y Programación Lineal paramétrica (por estar más desarrollados y experimentados que otras formas de programación, ofreciendo unas posibilidades más amplias sobre todo en la planificación empresarial a corto plazo y a nivel de proceso de producción básicamente).

En resumen, la Programación Matemática es uno de los instrumentos básicos que usa el especialista en Investigación Operativa o el moderno economista directivo al enfrentarse con sus responsabilidades.

Como dice Kaufmann, "El hombre de acción deberá adquirir los principios básicos de una ciencia nueva, una ciencia hecha para él: la Praxeología o ciencia de la acción" (24).

La Praxeología estudia los métodos que permiten aportar a la intuición un suplemento de lógica matemática. Denominando "Praxeogramas" a los modelos matemáticos de la acción y "Praxeógrafos" a los mapas o representaciones de estos modelos de los que da una idea el método PERT. La variada gama de métodos aplicados para la toma de decisiones ha sido agrupada bajo distintos neologismos; así tenemos, entre otros: Econometría, Investigación Operativa, Cibernética, e Informática.

La diferencia de la Investigación Operativa con la Econometría es posible que consista en que la primera trata en general de resolver problemas de optimización y no de previsión.

Los diferentes caminos a través de los cuales ha surgido la concepción cibernética han sido los siguientes (25):

1.º Las limitaciones de la Programación Matemática. Pues al elevarse en el nivel de dirección se impone una concepción que al ser más de tipo biológico que económico, ponga su acento en los problemas estratégicos y en la definición de estructuras, teniendo en cuenta las múltiples iteraciones. Es decir, una concepción más próxima al comportamiento real del hombre de empresa. Es preciso, se dice, intro-

(24) Kaufmann, A.: "El hombre y la ciencia de acción", Guadarrama, Madrid, 1967, pág. 12. Alcaide, A.: "Econometría e Investigación Operativa", BEE, núm. 68.

(25) Nieto de Alba, U.: "Introducción a la decisión Empresarial", apuntes de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Madrid, 1972, pág. 4. "Aproximación cibernética a la Dirección Empresarial", BEE, núm. 84, diciembre 1971.

(23) Ballesteros, E.: "Principios de Economía de la Empresa", Alianza-Universidad, Madrid, 1973, págs. 262 y 263.

ducir, junto a las "cajas blancas" de la Investigación Operativa, las "cajas negras" de la Cibernética.

2.º La Automatización que al generar sistemas complejos hace surgir la necesidad de los procesos de regulación y control.

3.º Al mismo tiempo surge la Teoría de los Sistemas dentro de ese movimiento interdisciplinar que aborda el estudio de los fenómenos o elementos del problema, en su conjunto.

Ante el creciente desarrollo de la Teoría de los Sistemas (manifestación del método estructuralista)⁽²⁶⁾, lo que permite considerar a la empresa como un sistema integrado por múltiples subsistemas funcionales totalmente interrelacionados, la Investigación Operativa (Metodología de carácter interdisciplinario), vuelve a cobrar un enorme interés y actualidad.

La tendencia a la determinación de modelos globales (o supermodelos en la terminología de Schneider) que permiten el análisis simultáneo y con ello la sincronización de los distintos sectores constituye el campo de investigación actual y futuro. Asimismo se tiende a la solución interdisciplinaria para resolver el complejo fenómeno real que es la empresa.

La Cibernética y la Investigación Operativa están siendo los medios más utilizados para alcanzar un conocimiento suficiente de la realidad, que permite actuar en condiciones de seguridad. También la aplicación de los modelos econométricos al campo de la empresa, y en especial a las actividades del marketing, está adquiriendo un fuerte impulso en la actualidad.

3. EL MODELO DE LA PROGRAMACION LINEAL

El problema general de la Programación Matemática puede enunciarse como el de determinar los valores de n variables X_1, X_2, \dots, X_n que

maximizan o minimizan (o sea, optimizan) una función objetivo:

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{max. (o bien, min.)}$$

En este caso, las variables X_1, X_2, \dots, X_n están sujetas a m restricciones de la forma:

$$H_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} B_i; i = 1, 2, \dots, m.$$

Así como: a restricciones de no negatividad.

$$X_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n.$$

En la segunda expresión analítica se verifica uno y sólo uno de los símbolos $\leq, =, \geq$, para cada una de las ecuaciones. El número de ecuaciones m puede ser mayor, menor o igual que el número de variables n .

Si tanto la función objetivo como todas las restricciones son lineales, tenemos el importante caso especial de programación matemática conocido como problema de "Programación Lineal". Si la función objetivo es no lineal y las restricciones son lineales o no lineales, tenemos entonces un problema de "Programación no Lineal". Por último, si algunas o todas las variables que integran el problema adoptan sólo valores enteros, entonces estamos ante un problema de "Programación Entera".

3.1. Planteamiento del problema

La Programación Lineal es una técnica matemática que ofrece una solución óptima a problemas definidos por una función objetivo lineal sujeta a restricciones lineales (se denomina programación lineal porque opera con funciones lineales o de primer grado).

El carácter más genuino de la programación reside en buscar la "combinación óptima de niveles de actividad", pues como dice Dorfmann, esta técnica pudiera llamarse más apropiadamente "análisis de procesos".

El planteamiento del problema de la Programación Lineal consiste en tres partes:

1.º La función lineal (beneficios o costes), cuyo valor ha de llevarse a máximo o mínimo y que se llama Función Económica u Objetivo.

(26) López Moreno, M.J.: "El Problema Conceptual en la Economía de la Empresa. Perspectivas en materia de decisiones", BEE, núm. 84, diciembre 1971.—Melèse, J.: "La gestion par les Systèmes", Hommes et Techniques, París, 1968.—Optner: "Análisis de Sistemas para Empresas y solución de problemas industriales", Diana, México, 1968.

La aplicación de técnicas analíticas al conjunto de un sistema técnico y de organización se denomina "análisis de sistemas".

2.º Las limitaciones (de capacidad).

3.º Las condiciones de no negatividad de las variables⁽²⁷⁾.

Por lo tanto, el modelo matemático de la Programación Lineal (en el caso de máximo), presenta la siguiente estructura:

$$\text{Max. } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Sometida a las restricciones específicas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_{10}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_{20}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_{m0}$$

Y las condiciones de no negatividad de las variables:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Los supuestos sobre los que se fundamenta la formulación de la Programación Lineal (modelo estático y elaborado en condiciones de certidumbre) del problema de la empresa son: 1.º linealidad; 2.º divisibilidad; 3.º adicionalidad, y 4.º condición de finitud⁽²⁸⁾.

El carácter estático supone que las condiciones técnicas y económicas fundamentales en las cuales se ha definido el problema no varían a corto plazo.

Las restricciones, definen los límites de las soluciones posibles, y pueden resultar de condiciones internas, tales como las instalaciones disponibles, o pueden resultar de consideraciones externas, por ejemplo: los Mercados Potenciales⁽²⁹⁾.

(27) Baumol, W.J.: "Teoría Económica y Análisis de Operaciones", Herrero Hermanos, México, 1964, pág. 82.

(28) Dorfman: ob. cit., págs. 106 y 107.

(29) Riggs, J.L.: Ob. cit., pág. 116.

Para el estudio de la Programación Lineal y el Método Simplex pueden verse las siguientes obras, entre otras:

Gass, S.I.: "Programación Lineal", CECSA, México, 1966.—Simonnard, M.: "Programmation Linéaire". Dunod, París, 1962.—Vajda: "Leçons sur la programmation mathématique", Dunod, París, 1965.—Kaufmann, A.: "Métodos y modelos de la Investigación Operativa", CECSA, México.—Dantzig: "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1964.—Alcocer Chillón y López Moreno: "Aplicaciones de la programación al campo económico", Ejes, Madrid, 1968.—Naylor y Vernon: ob. cit., Caps. VII y VIII.—Fernández Pirla: ob. cit. Caps. XV a XIX.

Los valores de las variables (niveles de empleo de los procesos o de las actividades) han de ser mayores o iguales que cero, pero nunca menores que cero, ya que ello no tendría significado económico alguno.

Si la empresa programa económicamente la producción empleando todos los posibles procesos productivos que pueden utilizarse, a distintos niveles, el rendimiento total de dicho programa vendrá expresado por la siguiente función objetivo:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{j=n} c_j x_j$$

Esta función está condicionada por la limitación de recursos disponibles, es decir, que la cantidad empleada de cada factor en los distintos procesos productivos utilizados a los correspondientes niveles, ha de ser menor o igual que la cantidad que de dicho factor se dispone (la matriz tecnológica conjuntamente con el vector de las existencias define la capacidad limitada de producción de la empresa):

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j \leq b_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

En Programación Lineal, un ejemplo del problema de minimización es "el problema de la dieta" perteneciente históricamente a la serie de los primeros problemas que fueron resueltos mediante los métodos de programación. Fue Stigler quien desarrolló una formulación de dicho problema publicando en 1945 un trabajo con el título "The Cost of Substance".

Las variables de holgura permiten poner las relaciones de condición en forma de igualdad y si aparecen en la solución óptima definen el grado de inactividad de los factores limitados. En cambio, las variables artificiales carecen de significado económico.

3.2. Métodos de resolución

Como quiera que no es posible aplicar los métodos de cálculo marginal a los programas lineales (se trata de un problema de máximo o mínimo condicionado con funciones lineales), no queda más remedio que buscar otras formas

de resolución de dichos problemas. Nos la ofrece la teoría de la Programación Lineal.

Existen dos métodos fundamentales de resolución del problema de la programación lineal: el primero de carácter geométrico, y el segundo algorítmico, operando en el álgebra lineal.

En 1947, Dantzig, elaboró un práctico procedimiento numérico, denominado "Método Simplex" (de ningún modo debe inferirse simple de *simplex*), para resolver problemas de programación lineal. Se trata de un método iterativo, el cual consiste en partir de una solución básica y deducir de ella otra también básica que proporcione un aumento de los beneficios o disminución de costes. Esta operación se repite hasta hallar la solución óptima.

El método de Simplex o Algoritmo de Dantzig (como variaciones de este método están: el Simplex Primario y el Simplex Dual) destaca por la sencillez de su estructura lógica (prescindimos de los aspectos matemáticos del mismo), ahora bien, en caso de tener un gran número de incógnitas y de ecuaciones, requiere aburridos cálculos. Por esta razón, la historia del desarrollo de los métodos de programación lineal se halla ligada prácticamente a la aplicación, para tales fines, de los ordenadores electrónicos.

Según Beckmann puede considerarse como el "método estándar" para la resolución de los problemas de programación lineal.

3.3. Aplicaciones económicas

La Programación Lineal se ha utilizado con éxito en una extensa variedad de problemas industriales específicos. Como ejemplos, podemos citar los problemas de producción, almacenaje, transporte, juegos, financiación, inversión, etc. Así como en el planteamiento y resolución de problemas macroeconómicos⁽³⁰⁾.

(30) Suárez A.S.: "Aplicaciones económicas de la Programación Lineal", Guadiana, Madrid, 1971.—Vokuhl, P.: "Programación Lineal aplicada a la empresa", Sagitario, Barcelona, 1968.—Lesourne: "Técnica económica y gestión industrial", Aguilar, Madrid, 1964.—Riley y Gass: "Linear Programming and Associated Techniques", Baltimore, Johns Hopkins Press, 1958.—Calafell, A.: "Teoría Lineal de la asignación óptima de los recursos financieros en los entes públicos", Financiación y Contabilidad, núm. 2.—Enrick,

Como tipos generales de problemas que pueden ser resueltos mediante la programación lineal, citamos los siguientes (31):

1.º Problemas de "transporte y asignación". Esencialmente los problemas del transporte implican el movimiento de cantidades limitadas de un grupo de procedencias a un grupo de destinos. El objetivo puede ser establecido de diversas maneras: minimizar la distancia total recorrida, maximizar el beneficio total, minimizar el tiempo total recorrido, o minimizar los costes totales. El problema del transporte o de distribución (*distribution method*) fue planteado y resuelto por Hitchcock en 1941, con anterioridad al desarrollo de la programación lineal. Para la resolución del mismo, junto al método general del simplex, se han desarrollado varios métodos operativos.

Los problemas de asignación constituyen una variante de este problema de programación lineal. En él nos enfrentamos con la asignación o aceptación de una clase de recursos o de productos a otras tantas clases de uso, de modo que el programa total sea óptimo.

Dicho problema puede resolverse por el método del simplex sin dificultad o por el método húngaro o algoritmo de Kuhn.

2.º Problemas de "afectación de recursos limitados a usos o actividades alternativas". En esta clase de problemas, las entradas (o *input*) se fijan como cantidades totales máximas susceptibles de ser repartibles entre los usos alternativos. La solución óptima, por lo tanto, empleará el total disponible de cada entrada, o una cantidad menor. La primera formulación de un

L.: "Planificación de la gestión", Paraninfo, Madrid, 1974.—Vinader, R.: "Estudios de diversos modelos de programación de producción", Estudios empresariales, núm. 68/1, abril 1968.—Castelló, E.: "El método de Dantzig aplicado a la programación económica de la producción", CEU, Anuario de Ciencia Económica, núm. 3.

(31) Lindsay, F.: "Técnicas modernas de gestión", Sagitario, Barcelona, 1966, págs. 70 y ss.—Fernández Pirla: ob. cit., págs. 104, 151, 334, 465 y 494. Suárez, A.S.: "La programación económica por el método del transporte", IDE, Madrid, 1972.

Con todo rigor se estudia el problema del transporte simple sirviéndose de dos instrumentos fundamentales: la Teoría de los Grafos y la Teoría de la Programación Lineal.

problema de programación lineal de este tipo fue hecha por George Stigler en 1945.

3.º El problema de "programa óptimo de almacenamiento de mercancías", o sea, dicho en otras palabras, el problema de la distribución óptima en el tiempo, de las compras y ventas, con la condición de que la diferencia entre la cifra de ingresos y de gastos sea máxima. Este problema de programación de almacenes o de planificación del horizonte (*horizon planing*) se resuelve por aplicación de la programación lineal y se suele conocer con el nombre de problema de Charnes y Cooper en atención a los que le plantearon y resolvieron.

4.º El problema de resolver un juego rectangular arbitrario, puede considerarse como un problema esencial de Programación Lineal e inversamente, muchos de estos problemas se reducen a otros que pertenecen a la teoría de los juegos⁽³²⁾.

5.º En el campo de la "Teoría de la Información" si se conoce el valor informativo real (después del filtraje del mensaje) de todas las fuentes en relación con la totalidad de las cuestiones acerca de las cuales se requiere información, y se conoce asimismo cuál es el coste del empleo de dichas fuentes, cabe plantearse el problema de "selección de las fuentes informativas" como una aplicación de la Programación Lineal⁽³³⁾.

6.º El establecimiento del Programa temporal de las inversiones y en relación con el mismo, la distribución de los recursos financieros de la empresa puede resolverse con el auxilio de la Programación Lineal. Para el estudio del problema de la Programación de inversiones, se han elaborado diferentes modelos, tales como los de Lorie y Savage, Weingartner, Capri, Shackle, Baumol y Quant, Carleton, Markowitz, etc.

7.º En materia de localización han sido varios los intentos de aplicar la Programación Lineal (el método del transporte ofrece gran-

des posibilidades en el ámbito de la localización económica, en general, y en particular, en la resolución de los problemas que plantea la localización de plantas industriales y establecimientos comerciales) y en el campo de la publicidad para determinar la combinación óptima de medios publicitarios (*media selection*).

8.º El método factor producto fue desarrollado inicialmente por Wassily Leontief para analizar globalmente una economía. Matemáticamente, es una variante de la programación lineal y proporciona un método de trabajo cuantitativo para la descripción de una economía completa.

También, el uso de las técnicas *input-output* aplicadas a nivel microeconómico, unido a las posibilidades que abre la programación lineal, permite resolver con rigor intrincados problemas de utilizar los resultados económicos de la explotación de los complejos industriales⁽³⁵⁾.

3.4. Posibilidades y limitaciones

El modelo de la Programación Lineal ofrece dos grandes posibilidades: el análisis de la sensibilidad de los programas lineales y la dualidad en programación lineal⁽³⁶⁾.

El análisis de la sensibilidad de los programas lineales tiene por objeto analizar la estabilidad de la solución óptima ante ciertas alteraciones de los datos numéricos (coeficientes de la función objetivo, términos independientes del siste-

(34) Suárez, A.S.: "Decisiones óptimas de inversión en la empresa", apuntes de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Madrid, 1974.—García Echevarría, S.: "Teoría de la inversión en la economía de la empresa", Esick-Market, núm. 10, febrero-mayo 1972.—Ribas, E.: "Programación de inversiones en la empresa: modelos", Financiación y contabilidad, Vol. 4.º, núm. 11, enero-marzo 1975.—Naylor y Vernon: ob. cit., págs. 415 a 451.

(35) Leonato, R.: "Programación Lineal aplicada a los procesos interrelacionados", BEE, núm. 68, mayo-agosto 1966, págs. 237 y ss.

A través de su "Tableau economique", Quesnay y los fisiócratas hacen aparecer el concepto de interdependencia de las actividades económicas que más tarde Walras habría de redescubrir y adoptar un método de análisis que Leontief resucitó en el presente siglo (Barre, R.: "Economía Política", Ariel, Barcelona, 1964, tomo I, pág. 51).

(36) Alcocer Chillón y López Moreno: ob. cit., págs. 218 y 234.—Suárez, A.S.: ob. cit., págs. 18 y 47.

(32) Moakinsey, J.: "Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos", Aguilar, Madrid, 1960, págs. 299 y 300.

(33) Vegas y Pirla: "Los problemas de decisión y la valoración de la información", reuniones nacionales de Investigación Operativa del Instituto de Racionalización del Trabajo, Madrid, 1962.

ma de restricciones y coeficientes de las variables del sistema). Y al suponer que dichos datos del programa lineal ya no son fijos, sino que varían, los modelos de programación lineal se hacen más generales y más realistas simulando así situaciones económicas que en otro caso no hubiera sido posible.

Bajo el epígrafe general de "análisis de la sensibilidad de los programas lineales" pueden englobarse los siguientes métodos: "el análisis de la sensibilidad" (*sensitivity analysis*), que supone introducir modificaciones o variaciones en los elementos que componen el modelo, con objeto de investigar las repercusiones que tienen lugar en la solución óptima obtenida (supone un análisis *a priori*). En la "Programación Lineal paramétrica", los datos numéricos de un programa lineal varían en función de un parámetro que interviene linealmente bajo la forma de función implícita; y, por último, la "teoría de la postoptimización" que permite analizar la sensibilidad del programa lineal una vez que el cambio se ha producido (supone un análisis *a posteriori*).

Otro aspecto que interesa resaltar es la dualidad en programación lineal. Según afirma Dantzig, la noción del problema dual y su relación con el problema original, que llamamos primal, fue introducido por J. Von Neumann, el creador de la teoría de los juegos. La formulación explícita de los teoremas que relacionan ambos problemas fue realizada formalmente, por primera vez, por Gale, Kuhn y Tucker.

Al problema primal:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c x \\ A x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

le corresponde el siguiente problema dual en forma generalizada:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= b w \\ A' w &\geq c \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

Los problemas primal y dual tienen una gran semejanza y relación, puesto que los objetivos y las condiciones del primal son las condiciones y los objetivos del dual. Precisamente a causa de esta semejanza se llaman "duals". Además, la solución óptima del primal que se trata de

maximizar o minimizar, es exacta a la solución óptima del dual que se trata de minimizar o maximizar.

Si un problema económico puede formularse como un problema de Programación Lineal, habrá entonces, por lo general, otro problema económico que corresponde al dual. La dualidad de los programas lineales es, en definitiva, un fenómeno matemático que simula diferentes problemas económicos⁽³⁷⁾.

La interpretación económica de las variables duales es la de los "precios contables" o "precios sombra" (*shadow prices*) de los recursos utilizados.

La dualidad en los programas lineales tiene un gran interés en los países socialistas en donde el mercado tiene una importancia mínima y como consecuencia, para la fijación de los precios se enfrentan tales países con complejísimo problemas.

Hemos destacado que para cada problema de asignación de recursos (primarios) existe un problema asociado de fijación de precios (dual). Pero, además, puede haber ventajas de cómputo si se resuelve el problema dual en lugar del primario. Si éste, por ejemplo, tiene más restricciones que variables, el dual puede resultar de más fácil solución, puesto que tendría menos restricciones.

La Programación Lineal como método tiene sus limitaciones. La primera de ellas es que todas las relaciones que puede tratar son lineales y, además, las formulaciones de la programación lineal no tienen en cuenta la incertidumbre⁽³⁸⁾.

Otros dos grandes defectos de que adolece la programación lineal son:

1.º Que es estática (es decir, al observar la empresa en un momento dado, en lugar de hacerlo en el devenir del tiempo, hemos en realidad, eliminado por abstracción la variable tiempo).

2.º El de considerar solamente un objetivo

(37) Dorfman, R.; Samuelson, P.A. y Solow, R.: "Programación Lineal y Análisis Económico", Aguilar, Madrid, 1964, pág. 44.

(38) Dorfman, R.: "Investigación Operativa", en panoramas contemporáneos de la Teoría Económica, Vol. III, asignación de recursos, Alianza Universidad, Madrid, 1970, pág. 67.

(maximización de beneficios o minimización de costes).

Para paliar estos problemas, contamos con la programación dinámica y la programación por objetivos (se trata de optimizar un problema de programación en el caso de multiplicidad de objetivos. Los estudios sobre esta materia se iniciaron y desarrollaron por: Klahr, 1958; Charnes y Cooper, 1961; Ijiri, 1963; Zadeh, 1963; Khingr, 1964; Da Cunha y Polack, 1967; Gesffrion, 1968, hasta llegar a las últimas formulaciones de programación lineal multiobjetivo de Zehny, 1974)⁽³⁹⁾.

Por otra parte, en programación lineal es muy difícil manejar más de un conjunto de condiciones al mismo tiempo y, como dice Lindsay resulta esencial la simplificación del problema, a base de suprimir algunos de los elementos menos importantes al aplicar esta técnica de gestión (al igual que ocurre con las demás aplicaciones del análisis matemático a los problemas de dirección). Finalmente, como la mayor parte de los métodos de análisis, la Programación Lineal entraña un costoso programa de recolección de datos.

4. OTROS MODELOS DE PROGRAMACION MATEMATICA

Como subconjuntos de Programación Matemática, además de la Programación Lineal, está la Programación Entera y la Programación no Lineal (modelos estáticos y en condiciones de certidumbre).

La "Programación Entera"⁽⁴⁰⁾ está caracterizada por la restricción de que las variables de solución deben expresarse por valores enteros. Este tipo de programación se emplea mucho en problemas de naturaleza económica. En 1958 Gomory desarrolló un método para resolver

problemas de programación lineal entera denominado "de formas enteras" o "del plano de corte". Siguiendo a Naylor y Vernon los autores que han contribuido al desarrollo de esta técnica son los siguientes: Dantzig y Glover; Dantzig, Fulkerson y Johnson; Gomory y Baumol; Gomory y Hoffman; Land y Doig; Markowitz y Manne. Para resolver el problema de presupuestación de capital Weingartner aplica este método.

La "Programación no Lineal"⁽⁴¹⁾ consiste en que la función que debe optimizarse o las que contienen las restricciones o todas a la vez son no lineales. Los primeros estudios sobre Programación no Lineal datan de 1950, cuando Kuh y Tucker publicaron sus primeros trabajos bajo el título "Nonlinear programming". Posteriormente, diversos autores tales como Charnes y Lemke en 1954; Frank y Wolfe en 1956; Baal en 1959; Kelley y Zonntendijk en 1960; Charnes y Cooper, etc., han desarrollado la programación "cuadrática" (consiste en maximizar o minimizar funciones cuadráticas sometidas a restricciones lineales. Es un caso especial de la Programación no Lineal).

Entre las técnicas de Programación no Lineal disponibles en la actualidad, se encuentran: 1.º la programación separable; 2.º la programación cuadrática; 3.º las técnicas de gradiente; 4.º los métodos de descomposición, y 5.º los métodos de plano de corte.

El interés teórico por los problemas de programación no lineal provienen de sus aplicaciones prácticas. Durante los últimos años numerosas aplicaciones, principalmente del campo industrial, han impulsado los estudios de la programación no lineal y conducido a interesantes resultados.

Otros dos problemas importantes de la programación matemática son: la programación dinámica (las variables del modelo dependen funcionalmente del tiempo), y la estocástica (modelos en situaciones de riesgo e incertidumbre).

(39) Lange, O.: ob. cit., Cap. VI.—Villalba, D.: "Programación por Objetivos", Financiación y Contabilidad, núm. 8, abril-junio 1974.—Buenos Campos, E.: "La programación de los objetivos empresariales: análisis crítico de los métodos", Financiación y Contabilidad, núm. 10, octubre-diciembre, 1974.

(40) Suárez, A.S.: "Programación Lineal en números enteros", Economía Política, núm. 53, septiembre-diciembre 1969.—Baumol: ob. cit., Cap. 7.

(41) Gutiérrez Cabria: "Algunos aspectos nuevos de la Programación no Lineal", Estadística Española, núm. 21. "Programación Lineal y Economía de la Empresa", ITECA, Tarragona, 1964.—Baumol: ob. cit., Cap. 6.—Naylor y Vernon: ob. cit., Cap. 9.—Dorfman, Samuelson y Solow: ob. cit.—Yu, L.: Art. cit., págs. 393 a 403.

La "Programación Dinámica" (42) es un método para resolver problemas de programación con múltiples estados en los que las decisiones tomadas en un estado fijan las condiciones que van a gobernar los estados sucesivos. La característica esencial de este método es que se accede a soluciones óptimas por etapas (es decir, secuencialmente). Además, la interdependencia de las decisiones en los diversos estados es lo que distingue los problemas de programación dinámica. Es una técnica apta para tratar los llamados procesos de decisión secuenciales.

Bellman en los Estados Unidos y Pontryagin en la Unión Soviética han introducido un principio fundamental para ese tipo de problemas: "el principio de optimización" (una política óptima tiene la propiedad de cualquiera que sea el estado inicial y la decisión inicial, las restantes decisiones deben de constituir una política óptima con relación al estado resultante de esta primera decisión).

Los procesos de adaptación secuencial nos conducen directamente a los conceptos de la cibernética, que pueden ser descritos como un tipo de cinemática de la acción.

La programación dinámica se está aplicando con éxito al planteamiento y resolución de problemas económicos: elección de inversiones, renovación de equipos, programación de almacenes, problemas de financiación, etc.

La "Programación Estocástica" (43), incluye aquellos casos en que la función objetivo que hay que optimizar y las que contienen las restricciones son variables aleatorias. Entre las con-

tribuciones más importantes a la literatura sobre programación estocástica se encuentran los trabajos de: Charnes y Cooper, Dantzig, Elmaghraby, Evers, Kataoka, Madansky, Tintner y Vajda.

Por último señalamos los tipos de modelos de planificación según Starr (44), que son:

1.º Los modelos que pueden ser definidos por redes y secuencias de decisiones, las cuales se encuentran unívocamente determinadas. Esta situación se tiene cuando puede predecirse con certeza, todos los posibles estados que puede adoptar el medio (p. ej., modelos de programación lineal, no lineal, técnicas de redes, etc.).

2.º Modelos en los que no existe, *a priori*, una forma mejor que las demás para alcanzar un óptimo. Quiere decir que no existen una estrategia óptima claramente definida, exigiendo una amplia flexibilidad para enjuiciar las distintas situaciones de decisión, modelos que por otra parte sólo pueden considerarse cuando se esté cerca de la certeza.

3.º Modelos que corresponden a aquellos casos en los que puede incurrirse en severas penas, por ejemplo, la ruina del jugador. Se busca en estos modelos unos criterios que permitan separar o distinguir todas aquellas alternativas o planes que pueden indicar tal ruina.

Toda esta gama de modelos de optimización constituye una importante herramienta para el empresario a la hora de adoptar decisiones económicas en la gestión empresarial.

(42) Bellman, R.: "Dynamic Programming", Princeton, New Jersey, 1959.—Vadja, S.: "Mathematical Programming", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.—Rosenbtlehl, P. y Ghouila-Houri, A.: "Les Choix Economiques, décisions sequentielles et simulation", Dunod, París, 1960.—Kaufmann, A. y Cruon, R.: "La Programación Dinámica", CECSA, México, 1967.—Cañibano, L.: "Las decisiones secuenciales en la

empresa", Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid, 1973.

(43) Naylor y Vernon: ob. cit., págs. 317 y ss.—Langer, O.: ob. cit., Caps. VII, IX, XI y XII.

(44) Verhulst, M.: "Nueva orientación de la investigación en materia de planificación y de gestión a nivel de empresa", BEE, núm. 73, abril 1962.