REVISTA ESPANOLA DE FINANCIACIÓN Y CONTABILIDAD
Vol. IV, n. 12 y 13
abril-septiembre 1975
pp. 439-458

METODOLOGIA APLICADA PARA EL CALCULO DE COSTES

por

José M.ª REQUENA RODRIGUEZ
Doctor en Ciencias Económicas
Catedrático de Contabilidad

SUMARIO

Introducción.—El problema de la incidencia final de los costes indirectos: métodos convencionales de liquidación de lugares recíprocos.—Aplicación de las técnicas del input-output.—Cálculo matricial del coste unitario de producción de los outputs.

INTRODUCCION

El problema esencial que incumbe a la contabilidad interna viene dado por el conjunto de magnitudes implicadas en las transacciones económicas inherentes al proceso productivo de la empresa, centrándose principalmente en «el consumo de bienes y servicios con miras a la producción y el equivalente monetario de este consumo: los costes» (1); a lo que, como consecuencia de la medida de la eficiencia productiva de la misma, podemos agregar el resultado interno.

Este último ya ha sido objeto de atención por nuestra parte en un trabajo dedicado específicamente a su estudio (2); de la metodología para el cálculo del coste versará el contenido del presente artículo. Conviene señalar, sin embargo, la íntima relación de ambos, en cuanto que gran parte de las magnitudes que intervienen en aquél implican necesariamente la previa aplicación de las técnicas operativas inherentes al cálculo de éste.

Del análisis de la estructura circulatoria de la empresa y el conjunto de sus procesos de interacción se deduce que la actividad económico-técnica o interna de la misma comienza con el input de factores económicos integrantes del producto y finaliza con el output de éste y su valor de coste.

En ocasiones, la incidencia final de los diversos componentes que integran el referido valor en cada una de las unidades de la producción resulta conocida, y puede, por tanto, llevarse a cabo directamente, pero en otras es necesaria la aplicación de determinados criterios de distribución. En el primer caso nos hallamos ante los denominados costes directos; en el segundo, ante los indirectos.

Por su parte, la aplicación de tales criterios puede perseguir una transformación directa de los *varios* factores de coste en el *único* valor de coste del output, pero la realidad orgánica de la empresa incluye una fase previa, a través de la cual tiene lugar precisamente la auténtica transformación de aquéllos en éste. Ello implica, por tanto, que durante el proceso debe realizarse la oportuna función colectora de los elementos nutrices del mismo, cuya homogénea combinación permita su adecuada adscripción final.

Clases de coste, lugares de coste y portadores de coste constituyen, pues, los tres estadios que definen la estructura orgánica (3) del proceso formativo del mismo, representando a su vez los tres conceptos fundamentales de la contabilidad interna.

Consiguientemente, resultan en principio dos procesos distintos de adscripción final del coste. Para los directos basta la mera afectación a los portadores en base a sus respectivos consumos. Para los indirectos deberá procederse, en primer lugar, a su distribución entre los diversos lugares, en base a los coeficientes —conocidos o estimados— que procedan, tras lo cual se llevará a cabo la imputación final a los portadores que corresponda.

Pero no todos los lugares de coste responden a una misma naturaleza de comportamiento respecto al producto, en cuanto que, mientras que unos poseen una participación directa en el proceso de producción, otros, sin embargo, sólo se relacionan indirectamente con él, dado que su función es la obtención de bienes para ser consumidos en otros lugares o la prestación de servicios para los mismos. A los primeros se les denomina lugares principales, mientras que los segundos constituyen lugares auxiliares, recíprocos o simplemente comunes, según que entre ellos exista o no interrelación de prestaciones. Evidentemente, un lugar de coste puede ser a la vez principal y auxiliar, circunstancia que concurrirá cuando su producción pueda ser destinada, indistintamente, al exterior o al consumo en la propia empresa (4).

Como es natural, cuando existan luga-

---

(1) SCHNEIDER, Erich: *Contabilidad industrial,* Aguilar, Madrid, 1960, pág. 9.

(2) REQUENA RODRÍGUEZ, J. M.ª: "El resultado interno", *Revista Española de Financiación y Contabilidad,* Ed. de Derecho Financiero, Madrid, núm. 8, págs. 231 a 252.

(3) Respecto de tales conceptos y su adecuada delimitación puede consultarse nuestro artículo publicado en el núm. 5 de esta misma revista: "Plan de cuentas del profesor Calafell", págs. 476 a 478.

(4) En relación con tales conceptos puede consultarse: SCHNEIDER, Erich: *Op. cit.,* páginas 45-46; LAUZEL P. y CIBERT A.: *Plan Ge-*

res auxiliares, el proceso para la imputación final de los costes indirectos deberá ampliarse en una fase intermedia, consistente en la redistribución de los costes primarios (5) de los lugares, en forma tal que el de los auxiliares quede absorbido por los principales, tras lo cual se realizará definitivamente su imputación a portadores.

Resulta, pues, que el proceso formativo del coste puede concretarse en las siguientes fases:

— AFECTACION de las clases de costes directos a portadores de coste.
— DISTRIBUCION de las clases de costes indirectos entre los lugares de coste.
— REDISTRIBUCION del coste de los lugares auxiliares para su absorción por los principales.
— IMPUTACION del coste total de los lugares principales, obtenido en la fase anterior, a los portadores de coste.

EL PROBLEMA DE LA INCIDENCIA FINAL DE LOS COSTES INDIRECTOS: METODOS CONVENCIONALES DE LIQUIDACION DE LUGARES RECIPROCOS

Por su propia naturaleza, la afectación de los costes directos no entraña dificultad alguna, en cuanto que, conocida la participación de los mismos en el producto, basta un simple cálculo, a lo sumo en base a la previa fijación de las oportunas equivalencias, para la obtención del coste de tal naturaleza correspondiente al output.

El problema se centra, por tanto, en la adscripción de los costes indirectos, cuya complejidad será tanto mayor cuanto más compleja sea la estructura del proceso productivo de la empresa.

Evidentemente, la mayor dificultad surge cuando existen prestaciones recíprocas entre lugares, dado que cada uno de los que se hallen interrelacionados necesita, para la adecuada valoración de sus prestaciones, conocer el importe de las que a su vez reciba de los demás. Concretamente, el coste total de las prestaciones realizadas por un lugar, a sí mismo o a otros, debe incluir tanto sus costes primarios como los secundarios, en cuya consecuencia, como dice el profesor SCHNEIDER (6), siempre que tenga lugar una cesión recíproca entre lugares, el coste de la unidad de prestación de los mismos sólo es determinable simultáneamente, cuya circunstancia constituye la esencia propia del problema, que no consiste en la realización técnica de la imputación, sino precisamente en la determinación del referido coste unitario.

En la práctica, las técnicas habitualmente utilizadas para su solución parten de la previa distribución, generalmente en un cuadro a doble entrada, de las clases de costes primarios, para, conocido el montante de los mismos por lugares, proceder a su redistribución.

Conviene hacer notar, sin embargo, la necesidad de seguir un orden concreto en la liquidación, dado que cuando simultáneamente concurran lugares auxiliares recíprocos y simplemente comunes deben ser éstos los que, por razones obvias, redistribuyan sus costes en primer término, al par que, si existieran algunos de ellos exclusivamente auxiliares de uno o más principales, deben ser liquidados en último lugar.

Sea una empresa cuyo proceso productivo se halla estructurado en base a 5 lugares de coste, con las siguientes interrelaciones:

Prestaciones del lugar 3 al:

1: 80 h/h = 40 %
2: 60 h/h = 30 %
4: 40 h/h = 20 %
5: 20 h/h = 10 %

Prestaciones del lugar 4 al:

1: 400 u. c. = 40 %
2: 500 u. c. = 50 %
4: ....
5: 100 u. c. = 10 %

---

neral de Contabilidad. Contabilidad analítica de Explotación, Compi, Madrid, 1973, págs. 141 y siguientes.

(5) Respecto de los conceptos de costes primarios y secundarios, véase SCHNEIDER, Erich: *Op. cit.,* págs. 46-47.

(6) SCHNEIDER, Erich: *Op. cit.,* págs. 59-60.

Prestaciones del lugar 5 al:

1: 20 h/h = 20 %
2: 40 h/h = 40 %
4: 40 h/h = 40 %
5: ....

Supongamos que los costes indirectos primarios, una vez realizada la fase de distribución, ascienden a:

Lugar 1 .... 349 ptas.
Lugar 2 .... 335 »
Lugar 3 .... 50 »
Lugar 4 .... 90 »
Lugar 5 .... 201 »

Evidentemente, como se desprende de las interrelaciones expuestas, los mencionados lugares ostentan la siguiente naturaleza:

Lugar 1: principal
Lugar 2: principal
Lugar 3: auxiliar común
Lugar 4: auxiliar recíproco
Lugar 5: auxiliar recíproco

en cuya consecuencia, según el orden de prelación anteriormente referido, deberá procederse, en primer término, a la liquidación del lugar 3, para seguidamente practicar la de los lugares 4 y 5.

Entre los métodos convencionales comúnmente utilizados en la redistribución de lugares recíprocos, unos se basan en la determinación previa de sus costes totales, cuyos importes se toman posteriormente como base de cálculo de liquidación; al par que otros llevan implícita en sí mismos la propia redistribución.

Por ejemplo, el método de tanteo (7) parte, en cada uno de dichos lugares, del total acumulado de sus costes primarios y los que le hayan podido corresponder por liquidación de los auxiliares comunes.

Sobre tales importes se aplican los coeficientes de participación respectivos —o el coste que en cada momento resulte de las unidades de prestación cedidas—, obteniéndose unos nuevos totales, no definitivos, más próximos a los reales que los iniciales, con lo cual finaliza el primer tanteo.

Sobre los importes resultantes del mismo se aplican nuevamente los coeficientes de participación, obteniéndose otros totales cuya aproximación a los reales es mayor que los hallados en el tanteo anterior; siguiendo el proceso y deteniendo la iteración cuando el último total hallado coincida con el que le sirvió de base de cálculo, en cuyo caso éste será el coste total real del lugar de que se trate.

De acuerdo con ello, el ejemplo anterior comportaría la siguiente solución (8):

	Primer tanteo	*Segundo tanteo*	*Tercer tanteo*	*Cuarto tanteo*	*Quinto tanteo*	*Sexto tanteo*	*Séptimo tanteo*
LUGAR 4:							
Coste primario	90,—	90,—	90,—	90,—	90,—	90,—	90,—
Liquidación 3	10,—	10,—	10,—	10,—	10,—	10,—	10,—
TOTAL	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—
De lugar 5	82,40	86,40	89,70	89,86	89,99	90,—	90,—
TOTAL	182,40	186,40	189,70	189,86	189,99	190,—	190,—
LUGAR 5:							
Coste primario	201,—	201,—	201,—	201,—	201,—	201,—	201,—
Liquidación 3	5,—	5,—	5,—	5,—	5,—	5,—	5,—
TOTAL	206,—	206,—	206,—	206,—	206,—	206,—	206,—
De lugar 4	10,—	18,24	18,64	18,97	18,99	19,—	19,—
TOTAL	216,—	224,24	224,64	224,97	224,99	225,—	225,—

(7) Suele ser conocido también con la denominación de *tâtonnement.*

(8) Podría obtenerse el mismo resultado, por idéntico proceso, realizando las prestaciones a costes unitarios en vez de porcentualmente.

En donde, como se puede observar, el resultado hallado han sido los costes totales de los lugares recíprocos, conocidos los cuales hay que proceder a su redistribución en base a los coeficientes de prestaciones respectivos o por valoración de los costes de las unidades cedidas, con lo cual habrá quedado adscrito el total de los costes indirectos a los lugares principales:

	Lugar 1	*Lugar 2*	*Lugar 3*	*Lugar 4*	*Lugar 5*
Costes primarios	349,—	335,—	50,—	90,—	201,—
Liquidación 3	20,—	15,—	—50,—	10,—	5,—
Liquidación 4	76,—	95,—		—190,—	19,—
Liquidación 5	45,—	90,—		90,—	—225,—
TOTAL	490,—	535,—	—	—	—

Consecuentemente, cubiertas las fases de distribución y redistribución, faltará tan sólo llevar a cabo la imputación final de los costes de los lugares a los portadores.

Planteado el problema de tal manera, puede resolverse también a través de un sistema de tantas ecuaciones como lugares recíprocos existan, en el que las incógnitas a determinar serían sus costes totales o el de las unidades de prestación de los mismos, siempre sobre la base de que el importe total de todas las prestaciones realizadas por un lugar debe ser igual a la suma de sus costes primarios y secundarios, en cuya consecuencia resultarían:

$$C_{Ti} = C_i + \sum_{j=1}^{r} t_{ij} C_{Tj} \text{ para } \forall_i \ (i = 1, 2 \ldots r) \qquad [1]$$

o bien:

$$u_i p_i = C_i + \sum_{j=1}^{r} u_{ij} p_j \text{ para } \forall_i \ (i = 1, 2 \ldots r) \qquad [2]$$

según se pretenda hallar, respectivamente, el coste total de los lugares o el de las unidades de prestación de los mismos; siendo:

C_{Ti}, C_{Tj} = Coste total del lugar i o j, respectivamente.

C_i, C_j = Coste intermedio del lugar i o j, respectivamente, por acumulación de su coste primario con el recibido como consecuencia de la liquidación de los lugares auxiliares comunes.

t_{ij} = Coeficiente de participación del lugar i en el j.

u_i = Unidades de producción del lugar i.

u_{ij} = Unidades de participación del lugar i en la producción del j.

p_i, p_j = Coste unitario de las prestaciones realizadas por los lugares i o j, respectivamente.

Resuelto el sistema que se haya planteado, y en base al valor que tomen las incógnitas C_{Ti}, C_{Tj} o p_i, p_j, respectivamente, se procede a la redistribución de los costes de los lugares recíprocos, tras lo cual se actuará como en el caso anterior.

Debe hacerse notar, no obstante, que la solución por ecuaciones lineales simultáneas puede resultar compleja cuando exista un excesivo número de lugares recíprocos, en cuyo caso cabe la aplicación de otras técnicas, como después veremos, que permiten resolver el problema con mayor rigor.

En nuestro ejemplo resultaría:

$$C_{T5} = C_5 + t_{54}\, C_{T4} = 206 + 0{,}1\, C_{T4}$$

$$C_{T4} = C_4 + t_{45}\, C_{T5} = 100 + 0{,}4\, C_{T5}$$

o bien:

$$u_5\, p_5 = C_5 + u_{54}\, p_4 \;; \quad 100\, p_5 = 206 + 100\, p_4$$

$$u_4\, p_4 = C_4 + u_{45}\, p_5 \;; \quad 1.000\, p_4 = 100 + 40\, p_5$$

según se pretenda la determinación de los costes totales de las secciones o los unitarios de sus prestaciones, respectivamente.

La solución de los anteriores sistemas comporta los siguientes resultados:

$$C_{T4} = \frac{182{,}40}{0{,}96} = 190 \quad ; \quad p_4 = \frac{18.240}{96.000} = 0{,}19$$

$$C_{T5} = \frac{216}{0{,}96} = 225 \quad ; \quad p_5 = \frac{216.000}{96.000} = 2{,}25$$

El método de distribuciones sucesivas, sin embargo (9), supone implícitamente la propia redistribución de los lugares recíprocos, en cuya consecuencia, como resultado final de su aplicación se llega simultáneamente a la liquidación de los mismos y, por tanto, a la determinación del coste total de los principales.

Para ello parte de la aplicación, sobre el total de costes acumulados en uno cualquiera de los lugares recíprocos, de los coeficientes de participación correspondientes a los restantes —o la adscripción de éstos, al coste unitario que hasta entonces resulte, de las unidades de prestación que hayan recibido—, con lo cual habrá sido totalmente redistribuido el importe acumulado hasta ese momento, en el lugar de coste de que se trate.

Seguidamente se lleva a cabo la misma operación con otro de los lugares afectados, cuya base de cálculo incluirá el coste recibido, en su caso, del anterior. Con ello habrá quedado redistribuido asimismo el importe acumulado hasta ese momento en el segundo lugar de coste, cuya incidencia habrá recaído, en la medida que corresponda, entre los restantes, incluido, si ha lugar, el liquidado en primer término.

En igual forma se continúa el proceso con todos los lugares recíprocos hasta agotarlos, concluyendo con ello el primer ciclo de reparto para, a continuación, iniciar un segundo en el que la base de cálculo queda reducida, en cada uno de los lugares, a los importes recibidos de los demás que no hubieren sido incluidos en el ciclo anterior, de manera tal que el coste a distribuir en cada una de las iteraciones resultará cada vez menor, interrumpiéndose el proceso cuando los respectivos importes pendientes de distribución se consideren despreciables.

Como consecuencia de ello, los costes indirectos totales habrán quedado absorbidos íntegramente por los lugares principales y auxiliares de éstos, si los hubiere, los que, en tal caso, se incorporarán a aquellos por simple aplicación de los coeficientes que procedan.

Todo ello en la forma que, para el ejemplo utilizado, se muestra a continuación:

(9) Respecto de los métodos de tanteo y distribuciones sucesivas puede consultarse:

LANG, Theodore: *Manual del contador de costos*, UTEHA, México, 1966, págs. 1072-1075.

	Lugar 1	*Lugar 2*	*Lugar 3*	*Lugar 4*	*Lugar 5*
Costes primarios	349,—	335,—	50,—	90,—	201,—
Liquidación 3	20,—	15,—	—50,—	10,—	5,—
TOTALES	369,—	350,—	—	100,—	206,—
1.ª distribución 4	40,—	50,—		—100,—	10,—
1.ª distribución 5	43,200	86,400		86,400	—216,—
2.ª distribución 4	34,560	43,200		—86,400	8,640
2.ª distribución 5	1,728	3,456		3,456	—8,640
3.ª distribución 4	1,382	1,728		—3,456	0,345
3.ª distribución 5	0,069	0,138		0,138	—0,345
4.ª distribución 4	0,056	0,069		—0,138	0,013
4.ª distribución 5	0,003	0,005		0,005	—0,013
5.ª distribución 4	0,002	0,003		—0,005	0,000
COSTES TOTALES	490,—	535,—		—	—

De tal manera ha quedado cubierta, sin necesidad de más cálculos, la fase de redistribución, faltando, pues, únicamente llevar a cabo la imputación de los costes de los lugares principales a portadores, en función de los coeficientes que procedan o de las unidades de prestación que los mismos incorporen.

APLICACION DE LAS TECNICAS DEL INPUT-OUTPUT

Como ya se ha apuntado en el epígrafe anterior, el problema del cálculo del coste puede resultar complejo cuando exista un gran número de lugares recíprocos, requiriéndose un tratamiento especial, al que pueden contribuir eficazmente las técnicas del análisis input-output. Si desarrollamos [1] resulta:

$$\begin{aligned} C_{T1} &= C_1 + t_{11} C_{T1} + t_{12} C_{T2} + \ldots + t_{1r} C_{Tr} \\ C_{T2} &= C_2 + t_{21} C_{T1} + t_{22} C_{T2} + \ldots + t_{2r} C_{Tr} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{Tr} &= C_r + t_{r1} C_{T1} + t_{r2} C_{T2} + \ldots + t_{rr} C_{Tr} \end{aligned} \qquad [3]$$

en donde por aplicación de las técnicas de tratamiento de los modelos abiertos de LEONTIEF (10) llegaríamos a la expresión matricial simplificada (11):

$$C_T = [I - T]^{-1} C \qquad [4]$$

(10) Pueden verse al respecto:
LEONTIEF, W.: *Estructura de la economía americana*, 1919-1939, Ed. Bosch, Barcelona, 1958. *Análisis económico Input-Output*, Ed. G. Gili, Barcelona, 1970.
FERNÁNDEZ PIRLA, J. M.: *Teoría económica de la contabilidad*, Ed. ICE, Madrid, 1970, páginas 238-239.
DESPLAS, Maurice: *Mathématique de la Decision Economique*, Ed. Dunod, París, 1967, páginas 211 y sigs.

(11) Trasponiendo términos y sacando factor común en [3], se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= (1 - t_{11}) C_{T1} - \quad t_{12}\, C_{T2} - \ldots - \quad t_{1r}) C_{Tr} \\ C_2 &= \quad - t_{21}\, C_{T1} + (1 - t_{22}) C_{T2} - \ldots - \quad t_{2r}) C_{Tr} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_r &= \quad - t_{r1}\, C_{T1} - \quad t_{r2}\, C_{T2} - \ldots + (1 - t_{rr}) C_{Tr} \end{aligned}$$

cuya expresión matricial sería:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - t_{11}) & - t_{12} \ldots & - t_{1r} \\ - t_{21} & (1 - t_{22}) \ldots & - t_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ - t_{r1} & - t_{r2} \ldots & (1 - t_{rr}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{T1} \\ C_{T2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{Tr} \end{bmatrix}$$

y en forma simplificada:

$$C = [I - T]\, C_T \quad ; \quad C_T = [I - T]^{-1} C$$

que nos permite hallar el coste total de cada uno de los lugares recíprocos, conocido el cual bastará realizar, como en el método de tanteo, su oportuna redistribución, con lo que habrá quedado totalmente adscrito el coste indirecto a los lugares principales.

Es de notar, sin embargo, la posibilidad de ampliar [3] por inclusión de todos los lugares de coste de la empresa —principales, auxiliares de los principales, auxiliares recíprocos y auxiliares comunes—, con lo que su solución nos proporcionaría directamente el coste total de los principales, base de cálculo de la fase de imputación.

En nuestro ejemplo el sistema de ecuaciones resultantes sería:

$$\begin{aligned} C_{T1} &= 349 + 0{,}4\,C_{T3} + 0{,}4\,C_{T4} + 0{,}2\,C_{T5} \\ C_{T2} &= 335 + 0{,}3\,C_{T3} + 0{,}5\,C_{T4} + 0{,}4\,C_{T5} \\ C_{T3} &= 50 \\ C_{T4} &= 90 + 0{,}2\,C_{T3} + 0{,}4\,C_{T5} \\ C_{T5} &= 201 + 0{,}1\,C_{T3} + 0{,}1\,C_{T4} \end{aligned} \qquad [5]$$

en donde, aplicando [4], resulta:

$$\begin{bmatrix} C_{T1} \\ C_{T2} \\ C_{T3} \\ C_{T4} \\ C_{T5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}4 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & -0{,}3 & -0{,}5 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}2 & 1 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 349 \\ 335 \\ 50 \\ 90 \\ 201 \end{bmatrix}$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} C_{T1} \\ C_{T2} \\ C_{T3} \\ C_{T4} \\ C_{T5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{0.504}{0{,}96} & \dfrac{0{,}42}{0{,}96} & \dfrac{0{,}36}{0{,}96} \\ 0 & 1 & \dfrac{0{,}456}{0{,}96} & \dfrac{0{,}54}{0{,}96} & \dfrac{0{,}60}{0{,}96} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{0{,}240}{0{,}96} & \dfrac{1}{0{,}96} & \dfrac{0{,}40}{0{,}96} \\ 0 & 0 & \dfrac{0{,}120}{0{,}96} & \dfrac{0{,}1}{0{,}96} & \dfrac{1}{0{,}96} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 349 \\ 335 \\ 50 \\ 90 \\ 201 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 490 \\ 535 \\ 50 \\ 190 \\ 225 \end{bmatrix}$$

en cuya consecuencia bastará tomar ahora los valores hallados para C_{T1} y C_{T2}:

$$\begin{aligned} C_{T1} &= 490 \\ C_{T2} &= 535 \end{aligned}$$

para, en base a ellos, llevar a cabo la fase de imputación.

Evidentemente, pueden tomarse los m lugares de coste —principales y auxiliares— de la empresa denotando su interrelación por u_{ij}, expresiva de las unidades físicas de prestación del lugar i al j —equivalentes a los suministros intersectoriales x_{ij} del análisis input-output—, haciendo asimismo C y v los vectores fila y columna, respectivamente, representativos de los factores indirectos primarios y la producción para venta (12) —equivalentes a los del factor trabajo y demanda final del referido análisis multisectorial—, en cuyo caso resultaría la siguiente tabla:

(12) Véase nota 4.

$$\begin{array}{c|ccccc|c|c|}
 & 1 & 2 & \dots & j & \dots & m & \\
\hline
1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1j} & \dots & u_{1m} & v_1 & u_1 \\
2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2j} & \dots & u_{2m} & v_2 & u_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
i & u_{i1} & u_{i2} & \dots & u_{ij} & \dots & u_{im} & v_i & u_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
m & u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mj} & \dots & u_{mm} & v_m & u_m \\
\hline
 & C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots & C_m & O & C \\
\end{array} \qquad [6]$$

en donde, como fácilmente puede observarse, la producción total u_i del lugar i, puede distribuirse entre el exterior y la propia empresa (13), mientras que los factores indirectos se distribuyen entre los distintos lugares (14).

Si suponemos que $p_1, p_2, \dots, p_m$, son los precios unitarios de la producción de cada uno de los referidos lugares, deberá cumplirse que:

$$u_j\, p_j = \sum_{i=1}^{m} u_{ij}\, p_i + C_j \text{ para } \forall_j \ (j = 1, \dots m) \qquad [7]$$

Evidentemente, existirá un sistema de coeficientes técnicos a_{ij} (15), tales que, desarrollando [7] y efectuando la oportuna sustitución de las u_{ij}, llegaríamos a (16):

$$p = [I - A^*]^{-1} c \qquad [8]$$

expresión definicional del coste unitario de las prestaciones de cada lugar, conocido el cual bastará imputar al output de producto las unidades que éste incorpore de cada uno de ellos —en su caso— para conocer el coste unitario del mismo (17).

---

(13) $u_i = \sum_{j=1}^{m} u_{ij} + v_i$ para $\forall_i$ (i = 1 ... m)

(14) $C = \sum_{j=1}^{m} C_j$

(15) $u_{ij} = a_{ij}\, u_j \quad ; \quad a_{ij} = \dfrac{u_{ij}}{u_j}$

(16) Tras el desarrollo de [7] y la sustitución de las u_{ij} por su valor, basta dividir la primera ecuación por u_1, la segunda por u_2, ..., y la m-ésima por u_m, para obtener:

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \dots + a_{m1} p_m + \frac{C_1}{u_1} = p_1$$
$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{m2} p_m + \frac{C_2}{u_2} = p_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1m} p_1 + a_{2m} p_2 + \dots + a_{mm} p_m + \frac{C_m}{u_m} = p_m$$

en donde, trasponiendo términos y sacando factor común, se llega a la siguiente expresión matricial simplificada:

$$[I - A^*]\, p = c$$

o lo que es lo mismo:

$$p = [I - A^*]^{-1} c$$

representando cada c_i de c el coste indirecto primario por unidad de prestación del lugar respectivo:

$$c_i = \frac{C_i}{u_i}$$

(17) Respecto de la aplicación de las técnicas del análisis input-output al cálculo del coste unitario de las prestaciones entre lugares interrelacionados puede consultarse: LEONATO MARSAL, R.: "Programación lineal aplicada a los procesos interrelacionados", *Boletín de Estudios Económicos*, Ed. Deusto, mayo-agosto 1966, en donde el lector hallará a su vez las variaciones que procede introducir en el modelo cuando hubieren existencias iniciales y finales.

CALCULO MATRICIAL DEL COSTE UNITARIO DE PRODUCCION DE LOS OUTPUTS

Cuanto llevamos dicho resulta de aplicación a la fase de redistribución de los costes de los lugares, en cuanto que partiendo de sus costes primarios nos es dado alcanzar, simultánea o sucesivamente —según el método aplicado—, el coste total de los principales, objeto de la fase de imputación. A lo sumo, la aplicación de las técnicas del análisis input-output permitirían, incorporando a la matriz de coeficientes técnicos los correspondientes a las prestaciones de los lugares principales, refundir las fases de redistribución e imputación.

Sin embargo, en un intento de integración de las cuatro fases, el profesor Dor (18) ha llegado a la siguiente ecuación vectorial del coste unitario completo:

$$c = A^* \cdot e + \mathrm{Diag}\,\frac{1}{q} \cdot T^* \cdot b \qquad [9]$$

Para ello parte de la posible descomposición de los factores de coste g en dos partes: directa, a, e indirecta, b; tal que:

$$g_i = a_i + b_i; \text{ para } \forall_i\,(i = 1, \ldots, n) \qquad [10]$$

Completemos nuestro ejemplo suponiendo que durante el período considerado se contabilizaron los siguientes consumos de factores productivos:

Directos

Primeras materias...	400 ptas.
Mano de obra directa	2.195 »
	2.595 »

Indirectos

Mano de obra indirecta	400 ptas.
Amortizaciones	500 »
Gastos varios fábrica	125 »
	1.025 »

cuya incidencia tuvo lugar conforme a los porcentajes de distribución que a continuación se indican:

	Prod. 1	*Prod. 2*	*Lugar 1*	*Lugar 2*	*Lugar 3*	*Lugar 4*	*Lugar 5*
Primeras materias	50 %	50 %					
Mano de obra directa ...	20 %	80 %					
Mano de obra indirecta ...			31 %	40 %	—	10 %	19 %
Amortizaciones			40 %	30 %	—	10 %	20 %
Gastos varios fábrica ...			20 %	20 %	40 %	—	20 %

Supongamos asimismo que la imputación del coste de los lugares principales a los productos responda a los siguientes porcentajes:

	Producto 1	*Producto 2*
Lugar 1	30 %	70 %
Lugar 2	40 %	60 %

(18) Dor, Leopold: «Equations caracteristiques de la comptabilite analytique», *Revue française d'informatique et de recherche operationnelle,* Ed. Dunod, julio 1969, págs. 75 y sigs.

En esencia, siendo:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$ Vector de clases de costes directos a afectar

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ Vector de clases de costes indirectos a distribuir

y haciendo:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$ Vector de costes totales directos por productos

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$ Vector de costes totales indirectos por productos

se tratará de pasar, en una primera fase, del vector a al vector d, y en una segunda, del vector b al vector k; en la forma que después veremos.

De tal manera, para hallar el coste total por productos bastará hacer:

$$\Gamma = d + k \qquad [11]$$

y finalmente, para obtener el coste unitario:

$$c = \text{Diag}\,\frac{1}{q}\cdot\Gamma \qquad [12]$$

Evidentemente, resultará que:

$$a_1 = a_{11} + a_{12}$$
$$a_2 = a_{21} + a_{22}$$

y por tanto:

$$d_1 = a_{11} + a_{21}$$
$$d_2 = a_{12} + a_{22}$$

en cuya consecuencia, de los datos consignados en el enunciado se deduce que:

$$a = \begin{bmatrix} 400 \\ 2.195 \end{bmatrix} \qquad [13]$$

y por tanto:

$$a_1 = 400 = 200 + 200$$
$$a_2 = 2.195 = 439 + 1.756$$

$$d_1 = 200 + 439 = 639$$
$$d_2 = 200 + 1.756 = 1.956$$

No obstante, supongamos que la producción correspondiente al referido período fue de 20 u. c. del producto 1 y 10 u. c. del producto 2; y hagamos:

$\alpha_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{q_j}$: Coeficiente de afectación de la clase de coste i por unidad de producto j,

con lo que se obtendrá la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{200}{20} & \dfrac{200}{10} \\ \dfrac{439}{20} & \dfrac{1.756}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 21{,}95 & 175{,}6 \end{bmatrix} \qquad [14]$$

que nos permite llegar a d, igualmente, en la siguiente forma:

$$d = \text{Diag}\, q \cdot A^* \cdot e \qquad [15]$$

en donde e representa un vector columna de n filas (19) cuyos componentes son todos la unidad.

Consecuentemente, en nuestro ejemplo resultará:

$$d = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 21{,}95 \\ 20 & 175{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 439 \\ 200 & 1.756 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 639 \\ 1.956 \end{bmatrix}$$

Qué duda cabe que la transformación del vector b en el k no puede llevarse a cabo directamente (20), en cuanto que todo proceso orgánico implica la distribución —y redistribución en su caso— de las clases de coste entre los lugares de coste, como paso previo a su imputación a portadores.

Habrá que definir, pues, los vectores intermedios:

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix} \quad \text{Vector de costes primarios por lugares} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad \text{Vector de costes totales indirectos por lugares}$$

concretándose entonces el problema en pasar del vector b al t, de éste al u y, finalmente, al k.

Para ello sea, en principio:

$\beta_{ih} = \dfrac{b_{ih}}{b_i}$: coeficiente de incidencia de la clase de coste i en el lugar h.

con lo que resultará:

$$\begin{aligned} t_1 &= b_1 \beta_{11} + b_2 \beta_{21} + b_3 \beta_{31} \\ t_2 &= b_1 \beta_{12} + b_2 \beta_{22} + b_3 \beta_{32} \\ t_3 &= b_1 \beta_{13} + b_2 \beta_{23} + b_3 \beta_{33} \\ t_4 &= b_1 \beta_{14} + b_2 \beta_{24} + b_3 \beta_{34} \\ t_5 &= b_1 \beta_{15} + b_2 \beta_{25} + b_3 \beta_{35} \end{aligned}$$

cuya expresión matricial es:

$$t = B^* \cdot b \qquad [16]$$

que aplicada a nuestro ejemplo permite hallar los siguientes valores para el coste primario de los respectivos lugares:

$$t = \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}40 & 0{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0 & 0 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}19 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ \\ 500 \\ \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 349 \\ 335 \\ 50 \\ 90 \\ 201 \end{bmatrix} \qquad [17]$$

concluyendo con ello la fase de distribución.

(19) En nuestro caso 2.
(20) Tan sólo en los sistemas de costes inorgánicos procedería tal transformación.

Procede seguidamente, pues, llevar a cabo la de redistribución de t, a cuyo efecto, con los coeficientes de interrelación entre lugares, formaremos la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} & \mu_{25} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} & \mu_{35} \\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44} & \mu_{45} \\ \mu_{51} & \mu_{52} & \mu_{53} & \mu_{54} & \mu_{55} \end{bmatrix} \qquad [18]$$

en la que cada μ_{fh} representa el coeficiente de prestación del lugar h al f; que en nuestro ejemplo será:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [19]$$

y por tanto (21):

$$u = M \cdot t \qquad [20]$$

es decir:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 349 \\ 335 \\ 50 \\ 90 \\ 201 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 445{,}2 \\ 475{,}4 \\ 0 \\ 90{,}4 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad [21]$$

De acuerdo con lo anteriormente expuesto faltará, finalmente, realizar la transformación del vector u en el k, para lo cual deberá formarse la matriz de coeficientes de imputación del coste de los lugares a los productos:

$$N = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \\ \eta_{31} & \eta_{32} \\ \eta_{41} & \eta_{42} \\ \eta_{51} & \eta_{52} \end{bmatrix} \qquad [22]$$

a través de la cual obtendremos (22):

$$k = N^* \cdot u \qquad [23]$$

---

(21) Dada la significación de μ_{fh}:

$$u_1 = \mu_{11} t_1 + \mu_{12} t_2 + \ldots + \mu_{1s} t_s$$
$$u_2 = \mu_{21} t_1 + \mu_{22} t_2 + \ldots + \mu_{2s} t_s$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_s = \mu_{s1} t_1 + \mu_{s2} t_2 + \ldots + \mu_{ss} t_s$$

(22) Dada la significación de η_{fj}:

$$k_1 = u_1 \eta_{11} + u_2 \eta_{21} + \ldots + u_s \eta_{s1}$$
$$k_2 = u_1 \eta_{12} + u_2 \eta_{22} + \ldots + u_s \eta_{s2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k_m = u_1 \eta_{1m} + u_2 \eta_{2m} + \ldots + u_s \eta_{sm}$$

cuya aplicación a nuestro ejemplo permite hallar los siguientes valores:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 445{,}2 \\ 475{,}4 \\ 0 \\ 90{,}4 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 323{,}72 \\ 596{,}88 \end{bmatrix} \qquad [24]$$

Resulta, pues, que en orden a la incidencia final de los costes indirectos procedería aplicar, para las fases de distribución, redistribución e imputación, respectivamente, las [16], [20] y [23], de cuya oportuna integración resulta, para la imputación del coste indirecto (23):

$$k = T^* \cdot b \qquad [25]$$

en cuya consecuencia, la [11] quedará transformada en:

$$\Gamma = d + k = \mathrm{Diag}\, q \cdot A^* \cdot e + T^* \cdot b \qquad [26]$$

cuyo valor, sustituido en [12], permite obtener [9], a través de la cual nos es dado llegar, simultáneamente, al coste unitario completo del output, en la forma que, para nuestro ejemplo, mostramos a continuación (24):

---

(23) Si sustituimos en [20] el valor obtenido para t en [16], resulta:

$$u = M \cdot B^* \cdot b$$

que sustituido a su vez en [23] nos permite obtener:

$$k = N^* \cdot M \cdot B^* \cdot b$$

y haciendo $T = B \cdot M^* \cdot N$ resultará:

$$T^* = N^* \cdot M \cdot B^*$$

en cuya consecuencia, la [23] quedará transformada en:

$$k = T^* \cdot b$$

en donde:

$$T^* = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \dots & \eta_{s1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \dots & \eta_{s2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \eta_{1m} & \eta_{2m} & \dots & \eta_{sm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1s} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2s} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mu_{s1} & \mu_{s2} & \dots & \mu_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \beta_{1s} & \beta_{2s} & \dots & \beta_{ns} \end{bmatrix}$$

(24)

$$T^* = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}40 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}19 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}24 & 0{,}32 & 0{,}22 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}46 & 0{,}58 & 0{,}38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}40 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}19 & 0{,}20 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3268 & 0{,}3160 & 0{,}280 \\ 0{,}5872 & 0{,}5940 & 0{,}520 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^* \cdot e + \mathrm{Diag}\,\frac{1}{q} \cdot T^* \cdot b =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 21{,}95 \\ 20 & 175{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3268 & 0{,}316 & 0{,}28 \\ 0{,}5872 & 0{,}594 & 0{,}52 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31{,}95 \\ 195{,}60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{323{,}72}{20} \\ \frac{596{,}88}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}136 \\ 255{,}288 \end{bmatrix}$$

En definitiva, el proceso para llegar al vector k puede sintetizarse en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} \alpha_{11} q_1 & \dots & \alpha_{1j} q_j & \dots & \alpha_{1m} q_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} q_i & \dots & \alpha_{ij} q_j & \dots & \alpha_{im} q_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} q_1 & \dots & \alpha_{nj} q_j & \dots & \alpha_{nm} q_m \end{array}} = e^* \cdot A \cdot \mathrm{Diag}\, q \qquad [27]$$

$$\longrightarrow d_1 \;\dots\; d_j \;\dots\; d_m$$

$$\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} b_{11} & \dots & b_{1h} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ih} & \dots & b_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nh} & \dots & b_{ns} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} b_1 \beta_{11} & \dots & b_1 \beta_{1h} & \dots & b_1 \beta_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_i \beta_{i1} & \dots & b_i \beta_{ih} & \dots & b_i \beta_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_n \beta_{n1} & \dots & b_n \beta_{nh} & \dots & b_n \beta_{ns} \end{array}} = b^* \cdot B \qquad [28]$$

$$\longrightarrow t_1 \;\dots\; t_h \;\dots\; t_s$$

$$t_1 \;\dots\; t_h \;\dots\; t_s$$

$$\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_f \\ \vdots \\ u_s \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} t_{11} & \dots & t_{1h} & \dots & t_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_{f1} & \dots & t_{fh} & \dots & t_{fs} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ t_{s1} & \dots & t_{sh} & \dots & t_{ss} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} \mu_{11} t_1 & \dots & \mu_{1h} t_h & \dots & \mu_{1s} t_s \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{f1} t_1 & \dots & \mu_{fh} t_h & \dots & \mu_{fs} t_s \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{s1} t_1 & \dots & \mu_{sh} t_h & \dots & \mu_{ss} t_s \end{array}} = M \cdot t \qquad [29]$$

$$\begin{array}{c} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_f \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s \end{array} \left|\begin{array}{ccccc} k_{11} & \ldots & k_{1j} & \ldots & k_{1m} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{f1} & \ldots & k_{fj} & \ldots & k_{fm} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{s1} & \ldots & k_{sj} & \ldots & k_{sm} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccccc} u_1\eta_{11} & \ldots & u_1\eta_{1j} & \ldots & u_1\eta_{1m} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ u_f\eta_{f1} & \ldots & u_f\eta_{fj} & \ldots & u_f\eta_{fm} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ u_s\eta_{s1} & \ldots & u_s\eta_{sj} & \ldots & u_s\eta_{sm} \end{array}\right| = u^* \cdot N \qquad [30]$$

$$\longrightarrow k_1 \ldots k_j \ldots k_m$$

Obsérvese, sin embargo, que en la fase de redistribución [29] se opera por aplicación de la matriz M sobre el vector de costes primarios de los lugares t —obtenido en la fase anterior— en vez de sobre los costes totales.

Consecuentemente, los costes secundarios de los lugares recíprocos —generados en la propia fase de redistribución— no quedan incorporados al vector u, y, por tanto, tampoco al vector k, resultando, pues, ciertas diferencias finales en Γ y c, que deben ser absorbidas convenientemente.

Para ello, ampliemos al vector de costes indirectos b en tantas variables complementarias L_h $(h \leq s)$ como lugares recíprocos concurran en la estructura productiva de la empresa, cada una de las cuales representará a los costes secundarios de su respectivo lugar, de manera tal que, en el supuesto de que todos los lugares de coste se hallen interrelacionados recíprocamente, resultaría:

$$b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \\ L_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ L_h \\ \cdot \\ \cdot \\ L_s \end{bmatrix} \qquad [31]$$

Evidentemente, resulta obvio que tales variables deben incidir en su totalidad, respectivamente, en los lugares a los que corresponden, pues solamente así se podrá obtener, en la fase de distribución [28], un vector t′ cuyos componentes se ajusten al valor que debe ser objeto de redistribución.

De tal manera, la matriz B quedará transformada en:

$$B' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdot\cdot & \beta_{1h} & \cdot\cdot & \beta_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdot\cdot & \beta_{ih} & \cdot\cdot & \beta_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdot\cdot & \beta_{nh} & \cdot\cdot & \beta_{ns} \\ \beta_{n+1,1} & \cdot\cdot & \beta_{n+1,h} & \cdot\cdot & \beta_{n+1,s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n+h,1} & \cdot\cdot & \beta_{n+h,h} & \cdot\cdot & \beta_{n+h,s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n+s,1} & \cdot\cdot & \beta_{n+s,h} & \cdot\cdot & \beta_{n+s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdot\cdot & \beta_{1h} & \cdot\cdot & \beta_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \cdot\cdot & \beta_{ih} & \cdot\cdot & \beta_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdot\cdot & \beta_{nh} & \cdot\cdot & \beta_{ns} \\ 1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 1 \end{bmatrix} \qquad [32]$$

Bastará efectuar ahora la oportuna ampliación de la matriz N en tantas colunmas como variables complementarias se hubieren introducido en el vector b:

$$N' = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdot\cdot & \eta_{1j} & \cdot\cdot & \eta_{1m} & \eta_{1,m+1} & \cdot\cdot & \eta_{1,m+h} & \cdot\cdot & \eta_{1,m+s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{f1} & \cdot\cdot & \eta_{fj} & \cdot\cdot & \eta_{fm} & \eta_{f,m+1} & \cdot\cdot & \eta_{f,m+h} & \cdot\cdot & \eta_{f,m+s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{s1} & \cdot\cdot & \eta_{sj} & \cdot\cdot & \eta_{sm} & \eta_{s,m+1} & \cdot\cdot & \eta_{s,m+h} & \cdot\cdot & \eta_{s,m+s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdot\cdot & \eta_{1j} & \cdot\cdot & \eta_{1m} & 1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{f1} & \cdot\cdot & \eta_{fj} & \cdot\cdot & \eta_{fm} & 0 & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \eta_{s1} & \cdot\cdot & \eta_{sj} & \cdot\cdot & \eta_{sm} & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 1 \end{bmatrix} \qquad [33]$$

para obtener tras el producto:

$$T'^{*} \cdot b' \qquad [34]$$

y la solución del sistema de ecuaciones resultante, los valores reales del vector k.

Finalmente, la nueva expresión:

$$c' = A^{*} \cdot e + \mathrm{Diag}\,\frac{1}{q} \cdot k' \qquad [35]$$

nos permite hallar el valor real de coste de los respectivos outputs.

Consiguientemente, en nuestro ejemplo resultará:

$$T'^{*} \cdot b' = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,31 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,40 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,10 & 0,1 & 0 & 1 & 0 \\ 0,19 & 0,2 & 0,2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 125 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3268 & 0,316 & 0,28 & 0,32 & 0,22 \\ 0,5872 & 0,594 & 0,52 & 0,58 & 0,38 \\ 0,0760 & 0,080 & 0,16 & 0 & 0,40 \\ 0,0100 & 0,010 & 0,04 & 0,100 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 500 \\ 125 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 323,72 + 0,32\,L_4 + 0,22\,L_5 \\ 596,88 + 0,58\,L_4 + 0,38\,L_5 \\ 90,4 \qquad\qquad + 0,40\,L_5 \\ 14 \quad + 0,10\,L_4 \qquad\qquad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 361 \\ 664 \\ 100 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad [36]$$

en cuya consecuencia, conocido ya k':

$$k' = \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 361 \\ 664 \end{bmatrix}$$

resulta, para los respectivos outputs, el siguiente coste unitario:

$$c' = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,95 \\ 195,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 361 \\ 664 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,95 \\ 195,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{361}{20} \\ \frac{664}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 262 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el coste unitario anteriormente hallado era:

$$P_1 = 48,136$$
$$P_2 = 255,288$$

cuya aplicación hubiera generado una diferencia de cobertura de:

Producto $P_1 = 50 - 48,136 = 1,864$; $1,864 \times 20 = 37,28$

Producto $P_2 = 262 - 255,288 = 6,712$; $6,712 \times 10 = 67,12$

104,40

Efectivamente, como consecuencia de haber aplicado en la fase de redistribución los costes primarios en vez de los totales, no quedaron absorbidos los costes interrelacionados de los lugares recíprocos, que por los resultados hallados en la aplicación de otros métodos sabemos que ascienden a:

Para el lugar 4 100
Para el lugar 5 24

precisamente los mismos valores que en [36] resultan para las variables L_4 y L_5, respectivamente.

Si a cada uno de dichos valores le deducimos la parte que incorpora por la prestación recibida sobre el coste total del otro, resultará:

Para el lugar 4: $100 - 0{,}4 \cdot 24 = 90{,}40$
Para el lugar 5: $24 - 0{,}1 \cdot 100 = 14{,}—$

104,40

justamente el mismo valor hallado como diferencia de cobertura, posteriormente corregido por introducción de las referidas variables complementarias.